

MA2601 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2010-02**Profesor:** Julio López.**Auxiliares:** Francisco Bravo, Sebastián Reyes Riffo.**1. EDO de orden 2.**Consideremos la EDO $y''(t) + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(t)$ **1.1. Solución homogénea, coeficientes constantes.**

Si $a_1(t)$, $a_0(t)$ son funciones constantes, buscamos soluciones de la forma $y(t) = e^{mt}$. Esto entrega el polinomio característico $p(m) = m^2 + a_1m + a_0$, y el problema se reduce a encontrar sus raíces m_1 y m_2 :

- si $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ y $m_1 \neq m_2$, se tiene: $y_1(t) = e^{m_1 t}$, $y_2 = e^{m_2 t}$
- si $m_1, m_2 \in \mathbb{R}$ y $m_1 = m_2$, entonces: $y_1(t) = e^{m_1 t}$, $y_2 = te^{m_1 t}$
- si $m_1, m_2 \in \mathbb{C}$ y $a + ib = m_1 = \overline{m_2}$, tendremos: $y_1(t) = e^{at} \cos(bt)$, $y_2 = e^{at} \sin(bt)$

1.2. Solución particular: variación de parámetros.

1. Resolver la ecuación homogénea. Encontrar una base $\{y_1(t), y_2(t)\}$ para $y_h(t)$.
2. Se propone la solución particular $y_p(t) = u_1(t)y_1(t) + u_2(t)y_2(t)$.
3. Para determinar $u_1(t)$, $u_2(t)$, se reemplaza la solución particular¹ y se obtiene la condición:

$$\begin{pmatrix} u_1'(t) \\ u_2'(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{W(y_1, y_2)(t)} \begin{pmatrix} y_2'(t) & -y_2(t) \\ -y_1'(t) & y_1(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix}$$

De lo anterior resulta

$$u_1(t) = - \int \frac{y_2(t)f(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt, \quad u_2(t) = \int \frac{y_1(t)f(t)}{W(y_1, y_2)(t)} dt$$

¹ya que $y_1(t)$, $y_2(t)$ son parte de la base de la solución homogénea:

$$\begin{aligned} a_1(t)[u_1'y_1 + u_2'y_2] + 2u_1'y_1' + 2u_2'y_2' + u_1''y_1 + u_2''y_2 &= f(t) \\ a_1(t)[u_1'y_1 + u_2'y_2] + u_1'y_1' + u_2'y_2' + \frac{d}{dt}[u_1'y_1 + u_2'y_2] &= f(t) \end{aligned}$$

dado que hay una sola ecuación para $u_1(t)$, $u_2(t)$, suponemos $u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0$ y se concluye la condición.

2. Ecuación de orden n .

Consideramos la ecuación $y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = q(t)$

2.1. Wronskiano.

Para una familia de funciones $\{y_1, \dots, y_n\}$ en $C^n(I)$, se define el Wronskiano por

$$Wt = W(y_1, \dots, y_n)(t) = \begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \dots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & \dots & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & \dots & y_n^{(n-1)}(t) \end{vmatrix}$$

Teorema 1 Sean $y_1, \dots, y_n \in C^n(I)$.

1. Si $W(t_0) \neq 0$ para algún $t_0 \in I$, entonces $y_1, \dots, y_n$ son linealmente independientes.
2. En general, el que $W(t) = 0 \quad \forall t \in I$ no basta para garantizar que $y_1, \dots, y_n$ son linealmente dependientes.
3. Si $y_1, \dots, y_n$ son funciones en H (conjunto de todas las soluciones de la ecuación homogénea), son equivalentes:

- i) $(\exists t_0 \in I) \quad W(t_0) \neq 0$
- ii) $(\forall t \in I) \quad W(t) \neq 0$
- iii) $y_1, \dots, y_n$ son linealmente independientes.

2.1.1. Fórmula de Abel.

Sean $y_1, \dots, y_n \in H$. Entonces el Wronskiano W satisface

$$W(t) = C \exp \left(- \int a_{n-1}(t) dt \right)$$

Para el caso de orden 2, podemos encontrar una solución linealmente independiente a partir de otra conocida $y_1(t)$. Esto usando la **Fórmula de Liouville** (la cual se deduce de la fórmula de Abel):

$$y_2(t) = C y_1(t) \int \frac{1}{y_1^2(s)} \exp \left(- \int a_1(u) du \right) ds$$

2.2. EDO de orden n , coeficientes constantes.

2.2.1. Coeficientes indeterminados.

Es usado cuando

$$q(t) = \sum_{i=1}^m e^{\alpha_i t} (P_i(t) \cos(\beta_i t) + Q_i(t) \sen(\beta_i t)) \quad (1)$$

donde $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$; $P_i(x), Q_i(x)$ son polinomios.

Aplicación.

1. Encontrar la base $\{y_1, \dots, y_n\}$ de la solución homogénea $y_h(t)$.
2. Determinar el anulador de $q(t)$.
3. Aplicar anulador y resolver una nueva ecuación homogénea.
4. La solución de esta última ecuación tendrá por base a $\{y_1, \dots, y_m\}$, $m > n$. Luego, $\{y_{n+1}, \dots, y_m\}$ será la base de la solución particular $y_p(t)$ de (1).
5. $y_p(t) = \sum_{k=n+1}^m d_k y_k(t)$ se reemplaza en (1), para obtener los coeficientes indeterminados $\{d_{n+1}, \dots, d_m\}$.

Anuladores.

$\forall n \geq 1, b \neq 0$:

Familia de funciones	Anulador
$\{e^{ax}, xe^{ax}, \dots, x^{n-1}e^{ax}\}$	$(D - a)^n$
$\{e^{ax} \cos(bt), xe^{ax} \cos(bt), \dots, x^{n-1}e^{ax} \cos(bt)\}$	$[D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)]^n$
$\{e^{ax} \sen(bt), xe^{ax} \sen(bt), \dots, x^{n-1}e^{ax} \sen(bt)\}$	$[D^2 - 2aD + (a^2 + b^2)]^n$

2.3. EDO de orden n , coeficientes variables.

2.3.1. Fórmula de Green

Es una consecuencia del método de variación de parámetros, por lo que se necesita conocer a priori una base del espacio H .

Teorema 2 (Representación de Green) *Una solución particular de la ecuación no homogénea es*

$$y_p(t) = \int G(t, s)q(s)ds, \quad G(t, s) = \frac{R(t, s)}{W(s)}$$

$$R(t, s) = \begin{vmatrix} y_1(s) & \dots & y_n(s) \\ y_1'(s) & \dots & y_n'(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-2)}(s) & \dots & y_n^{(n-2)}(s) \\ y_1(t) & \dots & y_n(t) \end{vmatrix}$$

2.3.2. Ecuación de Euler-Cauchy.

Para la ecuación

$$a_n t^n y^{(n)}(t) + \dots + a_2 t^2 y''(t) + a_1 t y'(t) + a_0 y(t) = f(t)$$

consideremos el cambio de variable $u = \ln(t)$, y la nueva variable dependiente $\bar{y} = y(e^u)$. Sus derivadas² están dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= \frac{1}{t} \bar{y}' \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{1}{t^2} (\bar{y}'' - \bar{y}') \\ \frac{d^3 y}{dt^3} &= \frac{1}{t^3} (\bar{y}''' - 3\bar{y}'' + 2\bar{y}') \end{aligned}$$

Al aplicar el cambio, resulta una EDO de orden n a coeficientes constantes

$$b_n \bar{y}^{(n)}(u) + \dots + b_2 \bar{y}''(u) + b_1 \bar{y}'(u) + b_0 \bar{y}(u) = f(e^u)$$

²El cálculo queda propuesto, básicamente es aplicar regla de la cadena.