MA2601-4 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2011-01
Profesor: Patricio Felmer.
Auxiliares: Francisco Bravo, Sebastián Reyes Riffo.

Clase auxiliar 04, solución P4
1/abril

P2. *Modelo Estelar.*
Una estrella esferoidal de radio $a > 0$ está compuesta por un fluido compresible cuya presión $p(r)$ y densidad $\rho(r)$ son funciones radiales ($0 \leq r \leq a$) tales que $p = k\rho^2$, con k constante positiva. Si $g(r)$ es la gravedad a una distancia r del centro de la esfera, entonces un balance de momentos y la ley de gravitación nos dan las relaciones

$$\begin{aligned} p' &= -g(r)\rho(r) \\ r^2 g(r) &= 4\pi G \int_0^r s^2 \rho(s) ds \end{aligned}$$

donde G es la constante de gravitación universal y las derivadas están tomadas con respecto a r.

(i) Deducir que ρ satisface la ecuación diferencial

$$r\rho'' + 2\rho' + \alpha^2 r\rho = 0, \qquad \alpha^2 = \frac{2\pi G}{k} \tag{1}$$

(ii) Determine $\rho(r)$ en términos de $\rho(0)$, la densidad del núcleo estelar.
Indicación: Resuelva para $r\rho$. Note que $\rho(r)$ debe ser positiva y finita si $r \to 0$.

(iii) Explique por qué este modelo predice estrellas de máximo tamaño $a = \dfrac{\pi}{\alpha}$

Sol.:

(i) se tienen las siguientes relaciones entre p, ρ y g:

$$p = k\rho^2 \tag{2}$$
$$p' = -g(r)\rho(r) \tag{3}$$
$$r^2 g(r) = 4\pi G \int_0^r s^2 \rho(s) ds \tag{4}$$

notamos que la ecuación buscada sólo involucra a ρ. Multiplicando (4) por $-\rho$, usando (3), y luego (2):

$$\begin{aligned} -(4\pi G)\rho \int_0^r s^2 \rho(s) ds &= r^2(-g(r)\rho) \\ &= r^2 p' = r^2 (k\rho^2)' = r^2 2k\rho\rho' \\ -(4\pi G)\rho \int_0^r s^2 \rho(s) ds &= 2kr^2\rho\rho' \end{aligned}$$

La expresión anterior se puede dividir por ρ, pues $\rho > 0$. Derivando a continuación, se obtiene

$$-(4\pi G)\left[\int_0^r s^2\rho(s)ds\right]' = 2k[r^2\rho']'$$
$$-(4\pi G)r^2\rho(r) = 2k[2rr' + r^2\rho'']$$

dividiendo esto último por $2kr$ y reordenando términos, se obtiene lo pedido.

(ii) Ya que la ecuación (1) no es a coeficientes constantes, consideremos el cambio de variables $u = r\rho(r)$. Sus derivadas están dadas por:

$$u' = \rho + r\rho'$$
$$u'' = \rho' + \rho' + r\rho'' = 2\rho' + r\rho''$$

Reemplazando esto en (1) se obtiene la ecuación

$$u'' + \alpha^2 u = 0. \tag{5}$$

Su polinomio característico está dado por $p(\lambda) = \lambda^2 + \alpha^2 = (\lambda + i\alpha)(\lambda - i\alpha)$, siendo claro que sus raíces son $\lambda_1 = i\alpha$ y $\lambda_2 = -i\alpha$. En consecuencia, son soluciones de (5):

$$u_1(r) = cos(\alpha r),\; u_2(r) = sen(\alpha r),$$

y por lo tanto, la solución de (5) está dada por una combinación lineal de las funciones anteriores, es decir

$$u(r) = Acos(\alpha r) + Bsen(\alpha r), \quad A,\, B \in \mathbb{R}.$$

Volviendo a la variable original, se tiene que

$$\rho(r) = A\frac{cos(\alpha r)}{r} + B\frac{sen(\alpha r)}{r}, \quad A,\, B \in \mathbb{R}.$$

Determinemos A y B: se tiene la condición

$$\rho(0) = \lim_{r\to 0}\rho(r) = \lim_{r\to 0}\left[A\frac{cos(\alpha r)}{r} + B\frac{sen(\alpha r)}{r}\right]$$

ya que $\lim\limits_{r\to 0}\dfrac{cos(\alpha r)}{r}$ diverge y $\rho(0)$ es finito, <u>necesariamente</u> $A = 0$. En consecuencia,

$$\rho(0) = B\lim_{r\to 0}\frac{sen(\alpha r)}{r} = B\alpha\lim_{r\to 0}\frac{sen(\alpha r)}{\alpha r} = B\alpha \quad \Rightarrow B = \frac{\rho(0)}{\alpha}$$

y finalmente, $\rho(r) = \rho(0)\dfrac{sen(\alpha r)}{\alpha r}$.

(iii)

$$\rho > 0 \Rightarrow \frac{sen(\alpha r)}{\alpha r} > 0 \Rightarrow sen(\alpha r) > 0 \Rightarrow r < \frac{\pi}{\alpha}$$