

MA2601-4 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2011-01**Profesor:** Patricio Felmer.**Auxiliares:** Francisco Bravo, Sebastián Reyes Riffo.**Clase auxiliar 03****28/marzo****P1.** Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $y' = 4(y^2 + 1), y(\pi/4) = 1$

(f) $y' = 1 - x - y + xy^2, y_1(x) = 1$

(b) $y' = \frac{y}{t(\ln(y) - \ln(t) + 1)}, y(1) = e$

(g) $ty' + y = t^2y^2$

(c) $y' = 1 + e^{y-t+5}$

(h) $y' - 4y \ln(y) + 2t(\ln(y))^3 = 0$

(d) $y' = 2x^2 + \frac{y}{x} - 2y^2, y_1(x) = x$

(i) $y' + \cot(t)y + \frac{y^2}{\sin(t)} = 0, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(e) $y' = -2 - y + y^2, y_1(x) = 2$

(j) $y' + ty^2 - (2t^2 + 1)y + t^2 + t - 1 = 0$

P2. Resuelva

$$\frac{dy}{dx} + y - \frac{3}{2} \frac{y^2}{(1+x)^4} = 2(1+x)^3$$

*indicación: considere $y_1(x) = a(1+x)^b$, con a y b constantes.***P3.** Se tiene una partícula en un medio viscoso que se deja caer desde una altura H (inicialmente se encuentra en reposo). Aplicando la segunda ley de Newton, se tiene que la EDO que rige el movimiento de dicha partícula es

$$-kv - mg = m \frac{d^2y}{dt^2}$$

donde $F = -kv$ es la fuerza de roce viscoso, y v es la velocidad de la partícula. Encuentre la velocidad y posición de la partícula en el tiempo.**P4.** Se tiene el problema de Cauchy para $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$(PC) \begin{cases} y' &= f(x, y), x \in I \\ y(x_0) &= y_0, \end{cases}$$

donde I es un intervalo simétrico que contiene al cero, f es continua, impar en la variable x , es decir

$$(\forall x \in I) (\forall y \in \mathbb{R}) \quad f(-x, y) = -f(x, y)$$

y globalmente Lipschitz en la segunda variable. Demostrar que la solución al problema es par, es decir

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \quad y(-x) = y(x)$$

P5. *Reducción de la ecuación lineal homogénea de orden 2.*

Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con condiciones iniciales

$$(E) \begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, & x \in I \\ y(0) = y_0 \\ y'(0) = y_1 \end{cases}$$

donde $y_0 > 0$, $y_1 \in \mathbb{R}$ e $I \subseteq \mathbb{R}$ es un intervalo.

- (a) Pruebe que el cambio de variable $v = \frac{y'}{y}$ reduce la ecuación en (E) a la ecuación de Ricatti

$$\frac{dv}{dx} + v^2 + a_1(x)v + a_0(x) = 0$$

Deduzca que la resolución de (E) es equivalente a la del siguiente sistema de ecuaciones de primer orden

$$(R) \begin{cases} y' = vy \\ \frac{dv}{dx} = -v^2 - a_1(x)v - a_0(x) \end{cases}$$

sujeto a una condición inicial apropiada en v (explícitela).

- (b) Encuentre la ecuación de Ricatti asociada a $y'' - y' - 2y = 0$ y resuelva el sistema (R) correspondiente, encontrando la solución que satisface $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

P6. (a) *Desigualdad de Gronwall.*

Sean $C \geq 0$, f y g dos funciones continuas y positivas en $[0, T]$. Pruebe que si

$$f(x) \leq C + \int_0^x g(s)f(s)ds \quad \forall t \in [0, T]$$

entonces

$$f(x) \leq C \exp \left(\int_0^x g(s)ds \right) \quad \forall t \in [0, T]$$

Indicación: considere $h(x) = C + \int_0^x g(s)f(s)ds$. Encuentre una desigualdad diferencial ordinaria para h y resuélvala con un factor integrante adecuado.

- (b) Sean y y z soluciones de los problemas de Cauchy en $[0, T]$

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), & y(0) &= y_0 \\ z' &= f(x, z), & z(0) &= z_0 \end{aligned}$$

Suponga que f es continua en sus dos variables y globalmente Lipschitz con respecto a su segunda variable. Pruebe que las soluciones existen y son únicas en $[0, T]$, y que existe $L > 0$ tal que

$$\sup_{x \in [0, T]} |y(x) - z(x)| \leq |y_0 - z_0| \exp(LT)$$