MA2601-4 - Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2011-01
Profesor: Patricio Felmer.
Auxiliares: Francisco Bravo, Sebastián Reyes Riffo.

1. Ecuación lineal de primer orden.

1.1. Variables Separables.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{g(x)}{h(y)} \\
\int_{y(x_0)}^{y(x)} h(s)ds &= \int_{x_0}^{x} g(t)dt \\
H(y) - H(y(x_0)) &= G(x) - g(x_0) \\
H(y) &= G(x) + \underbrace{H(y(x_0)) - G(x_0)}_{K}
\end{aligned}$$

1.2. Factor integrante.

Consideremos la ecuación

$$\frac{dy}{dt} + p(t)y = f(t)$$

al multiplicarla por $e^{\int p(t)dt}$ resulta

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt}e^{\int p(t)dt} + ye^{\int p(t)dt}p(t) &= f(t)e^{\int p(t)dt} \\
\frac{d}{dt}\left(ye^{\int p(t)dt}\right) &= f(t)e^{\int p(t)dt}
\end{aligned}$$

Integrando con respecto a t, se obtiene finalmente

$$y(t) = Ke^{-\int p(t)dt} + e^{-\int p(t)dt}\int f(t)e^{\int p(t)dt}$$

2. Ecuaciones reducibles a lineales.

2.1. Ecuaciones Homogéneas.

Dado $k \in \mathbb{N}$, se dice que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ es **homogénea de grado** k si $f(st, sy) = \pm s^k f(t, y)$. El cuociente de dos funciones f, g homogéneas de grado k da por resultado:

$$\frac{f(t,y)}{g(t,y)} = \frac{f(t, t \cdot \frac{y}{t})}{g(t, t \cdot \frac{y}{t})} = \frac{\pm t^k f(1, \frac{y}{t})}{\pm t^k g(1, \frac{y}{t})} = h\left(\frac{y}{t}\right)$$

Consideremos la ecuación

$$y' = \frac{f(t,y)}{g(t,y)} = h\left(\frac{y}{t}\right)$$

y el cambio de variable $y = zt$, de lo que resulta

$$z' = \frac{h(z) - z}{x}$$

que es una ecuación a variables separables.

2.2. Ecuación de Bernoulli.

$$y' + P(t)y = Q(t)y^m, \quad m \in \mathbb{R}\backslash\{0, 1\}$$

basta considerar el cambio de variable $z = y^{1-m}$, multiplicar la ecuación por $(1-m)y^{-m}$ y reemplazar, de lo cual resulta

$$z' + (1-m)P(t)z = (1-m)Q(t)$$

que es una EDO lineal de primer orden.

2.3. Ecuación de Ricatti.

$$y' = P(t)y^2 + Q(t)y + R(t)$$

supongamos conocida una solución y_1. Para encontrar las otras soluciones, se define $y(t) = y_1(t) - \dfrac{1}{z(t)}$. Reemplazando se obtiene

$$z' + (2p(t)y_1(t) + q(t))z = -p(t)$$

que es una EDO lineal de primer orden no homogénea.

3. Ecuaciones de orden 2 reducibles a orden 1.

Una EDO de segundo orden se escribe de la forma $F(x,\ y,\ y',\ y'') = 0$. Algunas de estas ecuaciones pueden ser reducidas a una de orden menor mediante la sustitución $p = y'$. A continuación se ilustran los dos casos posibles:

- **Caso 1:** $F(x,\ y,\ y',\ y'') = G(x,\ y,\ y'') = 0$, es decir cuando no aparece $y(x)$ explícitamente. Con la sustitución $y' = p$, la ecuación original se reduce a la ecuación de primer orden

$$G\left(x,\ p,\ \frac{dp}{dx}\right) = 0$$

- **Caso 2:** $F(x,\ y,\ y',\ y'') = H(y,\ y',\ y'') = 0$, es decir x no aparece explícitamente en la ecuación.
  Con la sustitución $y' = p$, usando la regla de la cadena queda

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

  A continuación, se tiene una EDO de primer orden (cuya variable independiente es y) de la forma

$$H\left(y,\ p,\ p\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

4. Teoremas de existencia y unicidad (TEU).

Sea $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función, y $L > 0$. Decimos que f es *globalmente Lipschitz* con respecto a la segunda variable, de constante L, si

$$(\forall\, y_1,\, y_2 \in \mathbb{R})\ (\forall\, x \in I) \quad |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Teorema 1 (TEU Global)**.** *Sea I un intervalo, y supongamos que $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua con respecto a su primera variable y globalmente Lipschitz respecto a la segunda. Entonces para cada $x \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ existe una única solución $y \in C^1(I)$ del problema de Cauchy*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} y'(x) & = & f(x, y(x)) & \forall x \in I \\ y(x_0) & = & y_0 & \end{array} \right.$$

Teorema 2 (TEU Local)**.** *Sea I un intervalo, $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. Supongamos que $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua con respecto a su primera variable en x_0; y que existen $r, \delta, L > 0$ tales que*

$$(\forall\, y,\, z \in [y_0 - r, y_0 + r])\ (\forall\, x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \quad |f(x, y) - f(x, z)| \leq L|y - z|$$

Denotamos por

$$\begin{array}{rcl} M & = & \text{máx}\{|f(x, y)| \mid x \in I,\ |x - x_0| \leq \delta,\ |y - y_0| \leq r\} \\ \delta_0 & = & \text{mín}\left\{\delta, \dfrac{r}{M}\right\} \\ J & = & I \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0) \end{array}$$

Entonces existe una única solución del problema de Cauchy, al menos en J.