MA2601-4 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2011-01
Profesor: Patricio Felmer.
Auxiliares: Francisco Bravo, Sebastián Reyes Riffo.

Clase auxiliar 01, solución P3
18/marzo

P3. *Reducción de la ecuación homogénea generalizada.*

(a) Considere la EDO de primer orden de la forma

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right), \qquad x > 0, \tag{1}$$

donde F es una función continua conocida. Mediante la sustitución $z = \frac{y}{x}$ desarrolle un método general para resolver esta EDO. Aplíquelo a la ecuación

$$y' = \frac{x+y}{x-y}.$$

Sol.: si se considera la sustitución $z = \frac{y}{x}$, se tiene que

- $F\left(\frac{y}{x}\right) = F(z)$,
- al cambiar la *variable dependiente* $y(x)$, no puede estar su derivada involucrada en la nueva ecuación. Veamos como lo anterior queda expresado en función de z' y x:

$$\begin{aligned} zx &= y \Big/ \frac{d}{dx} \\ z'x + z &= y' \end{aligned}$$

por lo tanto, al aplicar la sustitución en (1) se obtiene

$$\begin{aligned} z'x + z &= F(z) \\ \frac{dz}{dx}x &= F(z) - z \\ \int \frac{dz}{F(z) - z} &= \int \frac{dx}{x} \\ \int \frac{dz}{F(z) - z} &= \ln(x) + K \end{aligned}$$

que corresponde al método buscado. El desarrollo anterior tiene sentido pues al aplicar la sustitución se obtuvo una ecuación de variables separables.

(b) Considere ahora la EDO

$$y' = F\left(\frac{ax+by+e}{cx+dy+f}\right), \qquad a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Pruebe que si $ad - bc \neq 0$, la EDO (2) puede llevarse a la forma (1) mediante un cambio de variables del tipo $z = y - \alpha$, $t = x - \beta$, con α y β constantes elegidas adecuadamente. Aplique este método a la ecuación

$$y' = \frac{x+y+4}{x-y-6}.$$

<u>Sol.:</u> aplicando el cambio de variable sugerido al argumento de F, se tiene

$$\frac{ax+by+e}{cx+dy+f} = \frac{a(x-\beta)+b(y-\alpha)+(e+a\beta+b\alpha)}{c(x-\beta)+d(y-\alpha)+(f+c\beta+d\alpha)} = \frac{at+bz+\tilde{e}}{ct+dz+\tilde{f}}$$

si las constantes $\tilde{e} = e + a\beta + b\alpha$ y $\tilde{f} = f + c\beta + d\alpha$ son nulas, el problema está parcialmente resuelto pues

$$\frac{ax+by+e}{cx+dy+f} = \frac{at+bz}{ct+dz} = \frac{a+b(z/t)}{c+d(z/t)} = G\left(\frac{z}{t}\right) \Rightarrow F\left(\frac{ax+by+e}{cx+dy+f}\right) = F\circ G\left(\frac{z}{t}\right) = H\left(\frac{z}{t}\right)$$

donde claramente H es una función continua.

Veamos si efectivamente son nulas ambas constantes:

$$\begin{array}{rcl} a\beta + b\alpha & = & -e \\ c\beta + d\alpha & = & -f \end{array} \iff \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -e \\ -f \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} -e \\ -f \end{pmatrix} \text{ ya que } ad - bc \neq 0$$

con esto, α, β adecuados corresponden a la solución del sistema anterior, y lo concluido a partir de que $\tilde{e}$ y $\tilde{f}$ sean nulas tiene sentido.

Notemos que los cambios de variable sugeridos modifican tanto la *variable dependiente* como la *independiente* en la ecuación (2), es decir, de tener una ecuación en $y(x)$ se pasa a otra que involucra a $z(t)$.

Veamos como se relacionan $\frac{dz}{dt}$ y $\frac{dy}{dx}$; por regla de la cadena se tiene

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx}$$

por lo tanto, concluimos que la ecuación (2) puede escribirse como

$$\frac{dz}{dt} = H\left(\frac{z}{t}\right).$$

(c) ¿Cómo resolvería si $ad - bc = 0$?

Sol.: si $ad - bc = 0$, se tiene que $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es no invertible, lo cual sucede si una de sus filas es ponderación de la otra. Esto significa que

$$(\exists k \in \mathbb{R}) \;\; a = kc \;\wedge\; b = kd.$$

En adelante, suponemos $k \neq 0$ (el caso contrario es mucho más simple). Con esto, el argumento de F se puede escribir como

$$\frac{ax + by + e}{cx + dy + f} = \frac{kcx + kdy + k\tilde{e}}{cx + dy + f} = \frac{k(cx + dy + \tilde{e})}{cx + dy + f}$$

con $\tilde{e} = e/k$.
Si consideramos la sustitución $v(x) = cx + dy + f$, lo anterior se puede expresar como

$$\frac{ax + by + e}{cx + dy + f} = k\frac{(v + (\tilde{e} - f))}{v} = G(v)$$

por lo tanto,

$$F\left(\frac{ax + by + e}{cx + dy + f}\right) = F \circ G(v) = H(v)$$

Además, se tiene del cambio de variable que

$$\begin{aligned} v' &= c + dy' \\ y' &= \frac{v' - c}{d}, \end{aligned}$$

y reemplazando todo esto en (2), se obtiene una nueva EDO para $v(x)$

$$\begin{aligned} \frac{v' - c}{d} &= H(v) \\ v' &= dH(v) + c \end{aligned} \tag{3}$$

siendo (3) una ecuación de variables separables.