MA2601-3- Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
Profesor: Claudio Muñoz.
Auxiliares: Sebastián Barbieri L., Carlos Román.

Auxiliar 4

15 de Abril de 2011

P1. Considere la siguiente ecuación diferencial:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

Y suponga que tanto p como q son continuas en $\mathbb{R}$ y de periodo 1. Demuestre que si $\phi(x)$ es solución de la ecuación anterior tal que $\phi(0) = \phi(1)$ y $\phi'(0) = \phi'(1)$ Entonces ϕ es también periodica.

P2.

1. Considere la ecuación diferencial de segundo grado de la forma:

   $$y''(t) + f(y(t)) = 0$$

   Donde f: $(0, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función continua con $f(s) \geq 0$ para todo s >0. Sea $y(t)$ una solución de la ecuación en el intervalo $[0, T)$. Suponga que:

   $$A = \int_{y(0)}^{\infty} f(s)ds < \infty$$

   y que $y'(0)$ >$\sqrt{2A}$. Muestre entonces que $y'(t)$ >0 para todo $t \in (0, T)$. Para hacerlo, se le recomienda probar previamente que si F es primitiva de f, entonces para t en $[0, T)$:

   $$y'(t)^2 + 2F(y(t)) = Constante$$

2. Un cohete es lanzado en dirección radial desde la superficie de la Tierra. Sea $r(t)$ la distancia del cohete al centro de la Tierra. De acuerdo a la ley de gravitación de Newton, la aceleración del cohete si se desprecian otros efectos esta dada por:

   $$\alpha = r''(t) = -\frac{gR^2}{r(t)^2}$$

   Donde R es el radio de la Tierra, g >0 la aceleración a nivel de la superficie. Demuestre que si la velocidad inicial satisface que v_0 >$\sqrt{2gR}$ entonces el cohete jamás regresa a la Tierra. Este número es denominado velocidad de escape.

P3. P2 C1 del pino 2006:

1. Calcule la solución general en el intervalo $(\sqrt{2} - 1, \infty)$ de la ecuación

   $$(1 - 2x - x^2)y'' + 2(1 + x)y' - 2y = 0$$

   encontrando primero una solución por inspección directa

2. Encuentre la solución general en el intervalo $(0, \pi)$ de la ecuación

$$4y'' + 36y = \frac{1}{\sin(3x)}$$

$\boxed{\text{P4.}}$ P1 C2 del pino 2004:

1. Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + 2y = 4e^{2x} + 2e^{x}\cos(x)$$

2. Encuentre la solución del problema de condiciones iniciales:

$$x^2y'' + 2xy' - 6y = 50\frac{ln(x)}{x^3}, x > 0$$

$$y(1) = 1 \quad y'(1) = 5$$

$\boxed{\text{P5.}}$ Resuelva las siguientes ecuaciones:

1. $x^2y'' - 4xy' + 6y = \frac{1}{x}$
2. $x^2y'' - xy' + y = 4xln(x)$
3. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{3x}}{1+e^{x}}$