Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS
FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

Control 1, MA2601 (1-2) Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Semestre Primavera 2010

Prof. Felipe Olmos, Julio López, **Aux.** Avelio Sepúlveda, Francisco Bravo, Nikolas Tapia, Sebastián Reyes Riffo.

P1.- (**a**) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales

(i) (1.5 ptos.) $y' = 1 + x + y + xy$. (Encuentre también las soluciones constantes).

(ii) (1.5 ptos.) $y' + \dfrac{-3x^2y}{y+x^3} = 0$.
Sugerencia: Considere el cambio $y = z^\alpha$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ a encontrar de forma que la ecuación diferencial resultante sea homogénea.

(**b**) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(\lambda x, \lambda^\alpha y) = \lambda^{\alpha-1} f(x,y)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, y $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$ fijo. Considere la ecuación diferencial

$$y' = f(x,y)$$

(i) (1.5 pts.) Qué cambio de variables transforma la ecuación diferencial anterior en una ecuación a variables separables?. Qué ecuación se obtiene?

(ii) (1 pto.) A que tipo se reduce la ED si $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$.

(iii) (0.5 pts.) Determine el valor de α tal que $f(x,y) = \frac{1}{2}\frac{y}{x} - 3\frac{\sqrt{x}}{y^2}$ satisfaga la condición dada.

P2.- (**a**) (3 pts.) Considere para $x > 0$ la ecuación diferencial de Riccati

$$y' + \frac{y}{x} - y^2 = -\frac{4}{x^2}.$$

(i) (1 pto.) Encuentre la solución particular de la forma $y_p(x) = ax^b$.

(ii) (2 pts.) Encuentre la solución general.

(**b**) (3 pts.) Sea $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Consideremos el siguiente problema de Cauchy

$$(PC)\begin{cases} y' &= f(x,y),\ x \in I \\ y(0) &= y_0, \end{cases}$$

donde I es un intervalo simétrico que contiene al cero, f es impar en la variable x, es decir para todo x en I e y en $\mathbb{R}$: $f(-x,y) = -f(x,y)$ y globalmente Lipschitziana en la segunda variable. Demostrar que la solución al problema es par, es decir se cumple $y(-x) = y(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

P3.- (**a**) (2 pts.) Muestre que la solución del problema $y'' + 4y' = 0$, $y(0) = a$, $y'(0) = b$ tiende a una constante cuando $x \to +\infty$. Encuentre dicha constante.

(**b**) Un tanque de forma de un cono circular recto de altura H_0 y radio R esta dispuesto verticalmente y lleno de agua. El tanque tiene un *pequeño* orificio circular en el fondo con diámetro 2ρ. Se abre el orificio y el líquido cae libremente.

(i) (1.5 pto.) Encuentre la ecuación diferencial que describe el modelo.

(ii) (1.5 pts.) Resuelva la ecuación diferencial resultante.

(iii) (1 pto.) Sabiendo que $h(t_0) = h(0) = H_0$, encontrar el valor de la constante de integración. Encuentre el tiempo en el cual el tanque estará vacío

Tiempo: 3 horas — Septiembre 1, 2010