MA2601-3- Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
Profesor: Claudio Muñoz C.
Auxiliares: Sebastián Barbieri L., Carlos Román P.

Auxiliar 1

18 de Marzo de 2011

P1. Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales ordinarias.

1. $y' = xy^2$
2. $y'(1+x^2) = \arctan(x)$
3. $y' = e^x y$
4. $y' = 2^{x+y}$

P2. Resuelva las siguientes EDOs usando factor integrante.

1. $y' + 2y = x^2 + 2x$
2. $y' + \cos(x)y = \operatorname{sen}(x)\cos(x)$
3. $x(x-1)y' + y = x^2(2x+1)$

P3. Comente acerca de la existencia y unicidad del siguiente problema de Cauchy

$$(PC)\begin{cases} y' = -\cos(x)y + \operatorname{sen}(x)\cos(x) = f(x,y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

Para ello utilice alguno de los teoremas de existencia y unicidad, demostrando sus hipótesis.

P4. Considere el problema de Cauchy

$$(PC)\begin{cases} y' = (1+\sin(xy)^2)y^2 + 1 \quad x \in (-a,a),\ a > 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

(a) Pruebe que la solución de este problema es impar (esto es, $y(-x) = -y(x)$).
(b) Pruebe que necesariamente $a \leq \pi/2$

P5. Sea $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Consideremos el siguiente problema de Cauchy

$$(PC)\begin{cases} y' = f(x,y) \quad x \in I \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

donde I es un intervalo simétrico que contiene al cero, f es impar en la variable x (esto es, $\forall x \in I, y \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(-x,y) = -f(x,y)$) y globalmente Lipschitziana en la segunda variable. Demostrar que la solución al problema es par.

P6. Propuesto: Mostrar que $f(y) = y^{2/3}$ no satisface la condición de Lipschitz cerca del origen.
Hint: Estudie la derivada de la función cerca de cero, y concluya utilizando el Teorema del Valor Medio.
Encuentre una solución no nula del problema

$$y' = y^{2/3},\ y(0) = 0$$

Observe que la función nula es también solución. Combinando estas soluciones, demuestre que este problema admite infinitas soluciones.