CONTROL 2 MA 26A, 2005/1, M. del Pino
Profs. Aux: W. Arriagada, C. Muñoz
Tiempo: 3 hrs.

(1) Encuentre dos soluciones linealmente independientes, expresadas como series de potencias en torno a 0 de la ecuación diferencial

$$(1+x^2)y'' + 10xy' + 20y = 0 \ .$$

Determine el radio de convergencia de estas series.

(2) (a) Considere el problema no-lineal con condiciones de borde

$$u'' + a(x)(1-u^2)u = 0, \quad x \in [0,\pi],$$
$$u(0) = u(\pi) = 0,$$

donde a es continua en $[0,\pi]$ y $0 \leq a(x) \leq 1$ para todo $x \in [0,\pi]$. Use el Teorema de Sturm para probar que este problema tiene solo la solución $u \equiv 0$.

(b) Considere la ecuación diferencial

$$y'' + \frac{y}{x} + a(x)y = 0, \quad x \geq 1.$$

donde $a(x) \geq 0$ es continua en $[1,\infty)$. Demuestre que si

$$\int_1^\infty a(x)x dx = +\infty$$

entonces toda solución $y \not\equiv 0$ de esta ecuación posee un número infinito de ceros en $[1,\infty)$.

(3) (a) Encuentre la solución general de la ecuación diferencial

$$y''' + y' = 2x + \tan(x), \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

(b) Considere la ecuación diferencial

$$y''' + p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \quad x \in]a,b[,$$

con p, q, r continuas en $]a,b[$. Suponga que y_1 e y_2 son dos soluciones no-nulas de esta ecuación tales que para cierto $x_0 \in]a,b[$ se tiene que los vectores de $\mathbb{R}^3$ $(y_1(x_0), y_1'(x_0), y_1''(x_0))$ y $(y_2(x_0), y_2'(x_0), y_2''(x_0))$ son paralelos. Muestre que los vectores $(y_1(x), y_1'(x), y_1''(x))$ y $(y_2(x), y_2'(x), y_2''(x))$ son paralelos para todo $x \in]a,b[$.