

CONTROL 3 MA26A-01, 2005/1

Prof. M. del Pino

Auxs. W. Arriagada, C. Muñoz

Tiempo: 3 hrs.

1. Resuelva el sistema

$$\vec{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \vec{x}.$$

2. (a) Resuelva usando transformada de Laplace

$$y'' + y = f(x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1,$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 2 \\ e^{-2x}, & x \geq 2 \end{cases}$$

- (b) Resuelva usando transformada de Laplace el problema de valores iniciales

$$xy'' - 2xy' + 2y = x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

3. (a) Considere el sistema

$$\vec{x}' = A\vec{x} \tag{1}$$

donde $A \in \mathcal{M}_{N \times N}(\mathbb{R})$ es una matriz constante. Sea $T > 0$. Demuestre que (1) tiene una solución T -periódica (esto es, tal que $\vec{x}(t+T) = \vec{x}(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$), si y sólo si la matriz e^{TA} tiene a $\lambda = 1$ como valor propio.

- (b) Considere un sistema de segundo orden para $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ de la forma

$$\vec{x}'' = A\vec{x}$$

donde la matriz $A \in \mathcal{M}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ tiene valores propios $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$, con *vectores propios* asociados respectivos

$$\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \vec{u}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Encuentre una expresión para la solución general de este sistema, justificando claramente su respuesta.