Guía de Ejercicios

1. Sea $\varphi(t)$ la solución del problema con valores iniciales

$$\begin{cases} x'(t) = x^2 + t, \ t \geq 0 \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

   (a) Demuestre que $\varphi(1) \geq 1/2$.

   (b) Calcule la solución $\psi(t)$ de

$$\begin{cases} x'(t) = x^2, \ t \geq 0 \\ x(1) = 0.5. \end{cases}$$

   (c) Justifique cuidadosamente que la solución $\varphi(t)$ no existe sobre todo el intervalo $(0, 3]$.

2. Aplicar el teorema de existencia y unicidad a la siguientes ecuaciones diferenciales e indicar en qué recintos la ecuación admite solución única:

   (a) $y' = \text{sen}(y) - \ln(x+5)$, $y(1) = 2$.

   (b) $y' = \sqrt[3]{y}$, $y(1) = 1$.

   (c) $y' = \tan(y)$, $y(x_0) = y_0$.

   (d) $y' = x^2 \text{sen}(y)$, $y(x_0) = y_0$.

   (e) $y' = \frac{y-1}{x^2+x+1}$, $y(x_0) = y_0$.

3. Resolver las siguientes ecuaciones reduciendo el orden:

   (a) $yy'' + (y')^2 = 0$.

   (b) $x^2 y'' = 2xy' + (y')^2$.

   (c) $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$.

   (d) $y''(1 + 2\ln(y')) = 1$.

   (e) $y''^2 - y'y''' = (\frac{y'}{x})^2$.

4. Muestre que la solución del problema $y'' + 2y' = 0$, $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$ tiende a una constante cuando $t \to +\infty$. Encuentre dicha constante.

5. Considere el problema de valor inicial

$$\begin{cases} y' &= f(y) \\ y(0) &= 0, \end{cases}$$

   donde $f(y) = \frac{3}{2} y^{1/3}$.

   (a) Muestre que la función f no es Localmente Lipschitz cerca del origen $y_0 = 0$.

   (b) Encuentre las soluciones del PVI

   (c) Existe unicidad local?

6. Hallar una cota superior para la solución y, sabiendo que $y' \leq \frac{1}{x} y$, donde $x \in [1, 2]$.