

MA2601-2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2011-01

Ejercicio resuelto clase auxiliar 05

15/Abril

P3. Solucione la siguiente ecuación diferencial no homogénea:

$$(x-1)y'' - xy' + y = (x-1)^2 e^x \quad (1)$$

(**Sug.** Busque una solución homogénea de la forma $y_1(x) = e^{mx}$, con m a determinar).

Solución. Sea $y_1(x) = e^{mx}$, con $m \in \mathbb{Z}$ a determinar.

Entonces, $y_1' = me^{mx}$ e $y_1'' = m^2 e^{mx}$. Sustituyendo en la EDO homogénea asociada, obtenemos:

$$m^2(x-1)e^{mx} - mxe^{mx} + e^{mx} = 0.$$

Teniendo en cuenta que $e^{mx} \neq 0$,

$$m^2(x-1) - mx + 1 = 0.$$

Además, como $x \neq 1$:

$$0 = m^2 - m = m(m-1),$$

de donde $m_1 = 0$, $m_2 = 1$. Elegimos entonces $y_1(x) = e^x$.

Busquemos ahora, la 2da solución. Para ello, usaremos la fórmula de Liouville

$$\begin{aligned} y_2(x) &= e^x \int e^{-2x} e^{\int (\frac{x}{x-1}) dx} dx \\ &= e^x \int e^{-2x} e^{x+\ln(x+1)} dx \\ &= e^x \int e^{-x} (x+1) dx \\ &= -x. \end{aligned}$$

Luego $y_h(x) = c_1 x + c_2 e^x$.

Busquemos ahora la solución particular: $y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$, donde

$$u_1' = -\frac{y_2 q(x)}{W(y_1, y_2)}; \quad u_2' = \frac{y_1 q(x)}{W(y_1, y_2)}.$$

En este caso,

$$q(x) = (x - 1)e^x, \quad W(y_1, y_2) = (x - 1)e^x.$$

Luego

$$u'_1 = -e^x, \quad u'_2 = x$$

de donde

$$u_1 = -e^x, \quad u_2 = \frac{x^2}{2}.$$

Así,

$$y_p(x) = \left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^x.$$

Finalmente

$$y(x) = y_h + y_p = c_1x + c_2e^x + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)e^x.$$