MA2601-2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2011-01
Profesor: Julio López.
Auxiliares: Sebastián Reyes Riffo, Sebastián Román.

EDOs no lineales

P1. Dado el siguiente sistema no lineal

$$\begin{cases} x' &= x(10 - x + \frac{1}{2}y) \\ y' &= y(16 - y + x) \end{cases}$$

(a) Calcule y grafique las nulclinas en x e y.

(b) Encuentre los puntos cr'iticos del sistema.

(c) Determine las linealizaciones en torno a los valores críticos del sistema. Calcule el Jacobiano y los valores propios en torno a ellos. Es degenerado el sistema?

(d) Determine el tipo y estabilidad de los puntos cr'iticos.

(e) Elabore los diagramas de fase cerca de los puntos cr'iticos, indicando el sentido del tiempo y la direcci'on de las rectas tangentes y/o as'intotas.

(f) Elabore un diagrama de fases global para $x \geq 0,\ y \geq 0$

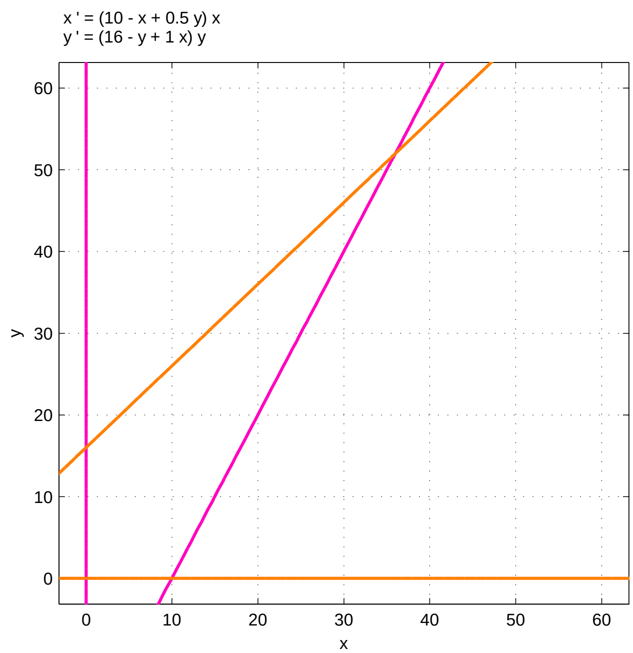
(g) Explique el sentido matemático y biólogico de cada término, considerando el sistema de tipo Lotka-Volterra

(Ppto) Realice lo anterior para el siguiente sistema y compare con el sistema anterior.

$$\begin{cases} x' &= x(10 - x - \frac{1}{2}y) \\ y' &= y(16 - y - x) \end{cases}$$

Solución:

(a) Sean $F(x,y) = x(10 - x + \frac{1}{2}y)$ y $G(x,y) = y(16 - y + x)$. Las nulclinas en x e y son las curvas definidas por $F(x,y) = 0$ e $G(x,y) = 0$, respectivamente. Las gráficas vienen dadas por:



(b) Los puntos críticos se encuentran al resolver el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x(10 - x + \frac{1}{2}y) & = & 0 \\ y(16 - y + x) & = & 0 \end{array} \right.$$

(Notar que estos puntos corresponden a la intersección de las nulclinas de x e y). Se presentan los siguientes casos:

- Si $x = 0$:
$$y(16 - y) = 0 \Rightarrow y = 0 \;\vee\; y = 16.$$
- Si $y = 0$:
$$x(10 - x) = 0 \Rightarrow x = 0 \;\vee\; x = 10.$$
- Si $x, y \neq 0$:
$$\left\{ \begin{array}{rcl} 10 - x + \frac{y}{2} & = & 0 \\ 16 - y + x & = & 0 \end{array} \right. \Rightarrow x = 36,\; y = 52.$$

 Por tanto, los puntos críticos son:

$$\mathcal{C} = \{(0,0), (0,16), (10,0), (36,52)\}.$$

(c) Para determinar los sistemas linealizados en torno a cada punto crítico, definamos $H(x,y) = (F(x,y), G(x,y))$. Luego el Jacobiano de H es:

$$J_H(x,y) = \begin{bmatrix} 10 - 2x + \frac{y}{2} & \frac{x}{2} \\ y & 16 - 2y + x \end{bmatrix}.$$

Los Jacobianos del sistema en torno a los puntos críticos vienen dados por:

$$J_H(0,0) = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix},\ J_H(0,16) = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 16 & -16 \end{bmatrix},\ J_H(10,0) = \begin{bmatrix} -10 & 5 \\ 0 & 26 \end{bmatrix}, J_H(36,52) = \begin{bmatrix} -36 & 18 \\ 52 & -52 \end{bmatrix}.$$

Luego los sistemas linealizados son:

- para $(x_1, y_1) = (0,0)$: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 0 \\ y - 0 \end{bmatrix}$.
- para $(x_2, y_2) = (0,16)$: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 16 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 0 \\ y - 16 \end{bmatrix}$.
- para $(x_3, y_3) = (10,0)$: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 5 \\ 0 & 26 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 10 \\ y - 0 \end{bmatrix}$.
- para $(x_4, y_4) = (36,52)$: $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -36 & 18 \\ 52 & -52 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - 36 \\ y - 52 \end{bmatrix}$.

Veamos el determinante de cada Jacobiano, entorno de los puntos críticos:

- $\det(J_H(0,0)) = 160 \neq 0$.
- $\det(J_H(0,16)) = -286 \neq 0$.
- $\det(J_H(10,0)) = -260 \neq 0$.
- $\det(J_H(36,52)) = 936 \neq 0$.

Esto implica que el sistema es no degenerado en torno a cada uno de sus puntos críticos.
(d) Los valores propios de cada Jacobiano vienen dados por :

$\vec{x_1}$: $\lambda_1 = 10,\ \lambda_2 = 16$.

$\vec{x_2}$: $\lambda_1 = 18,\ \lambda_2 = -16$.

$\vec{x_3}$: $\lambda_1 = -10,\ \lambda_2 = 26$.

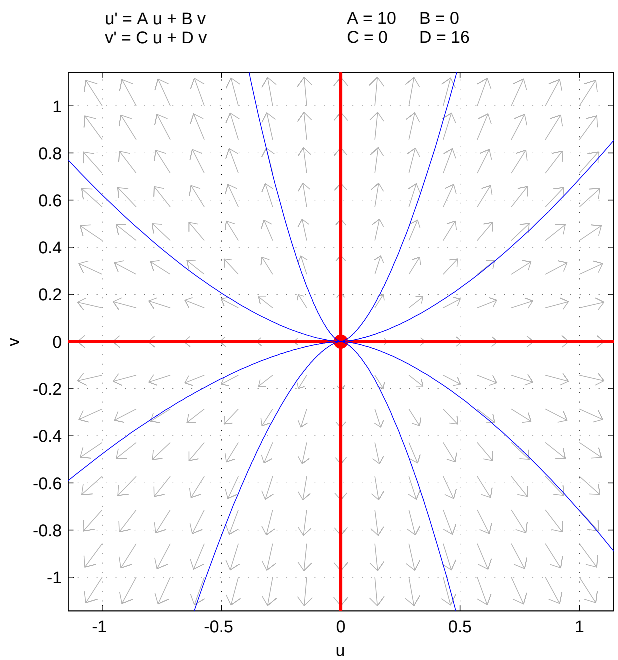
$\vec{x_4}$: El polinomio característico en este caso es $p(\lambda) = \lambda^2 + 88\lambda + 936$, cuyas raíces son: $\lambda_i = -44 \pm 10\sqrt{10} \Rightarrow \lambda_1 = -12,38,\ \lambda_2 = -75,62$.

En los cuatro casos, los valores propios son reales y distintos.

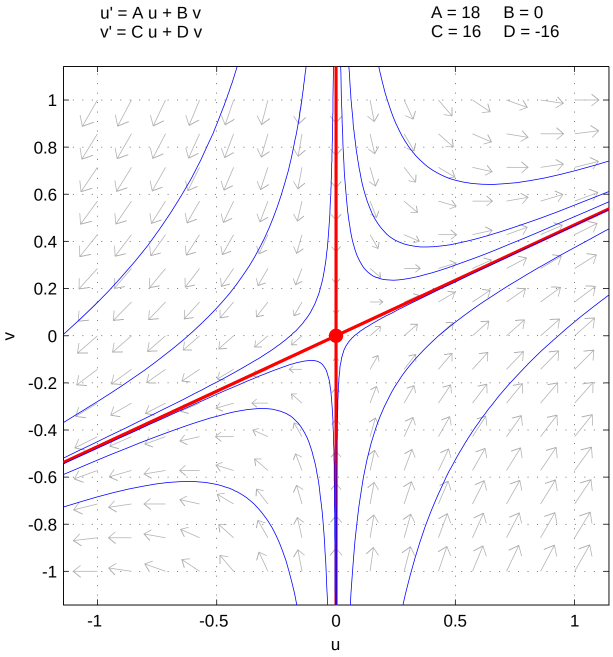
- En (0,0), los valores propios $\lambda_1 = 10$, $\lambda_2 = 16$ son de igual signo, por lo que (0,0) es un **nodo**. Como son positivos, el nodo es **inestable**.
- En (0,16), los valores propios $\lambda_1 = 18$, $\lambda_2 = -16$ son de signo distinto, por lo que (0,16) es un **punto silla**, el cual es **inestable**.
- En (10,0), los valores propios $\lambda_1 = -10$, $\lambda_2 = 26$ son de signo distinto, por lo que (10,0) es un **punto silla**, el cual es **inestable**.
- En (36,52), los valores propios $\lambda_1 = -12,38$, $\lambda_2 = -75,62$ son de igual signo, por lo que (0,16) es un **nodo**. Como son negativos, el nodo es **asintóticamente estable**.

(e) Los diagramas de fase en torno a los puntos críticos son los siguientes (según los ejes x e y centrados en el punto crítico):

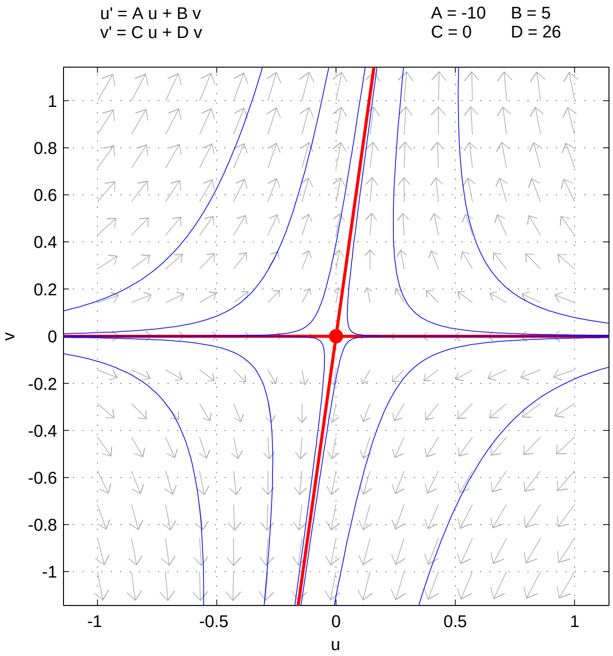
- (0,0): nodo inestable



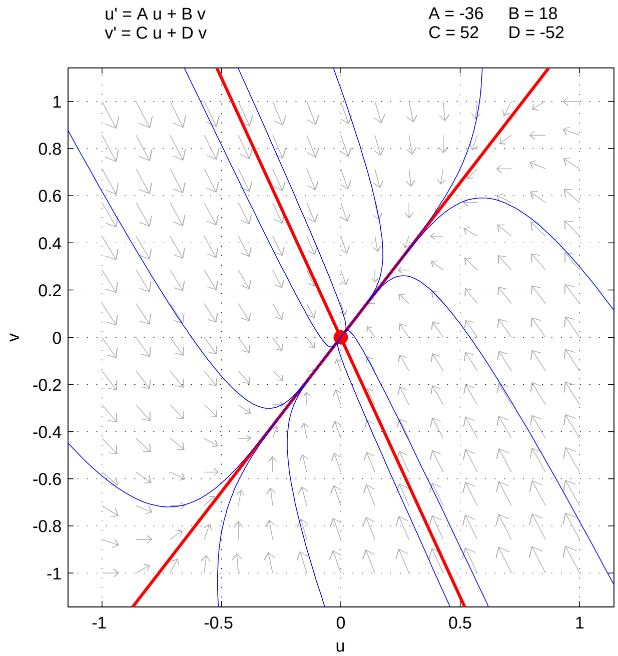
- (0,16): punto silla



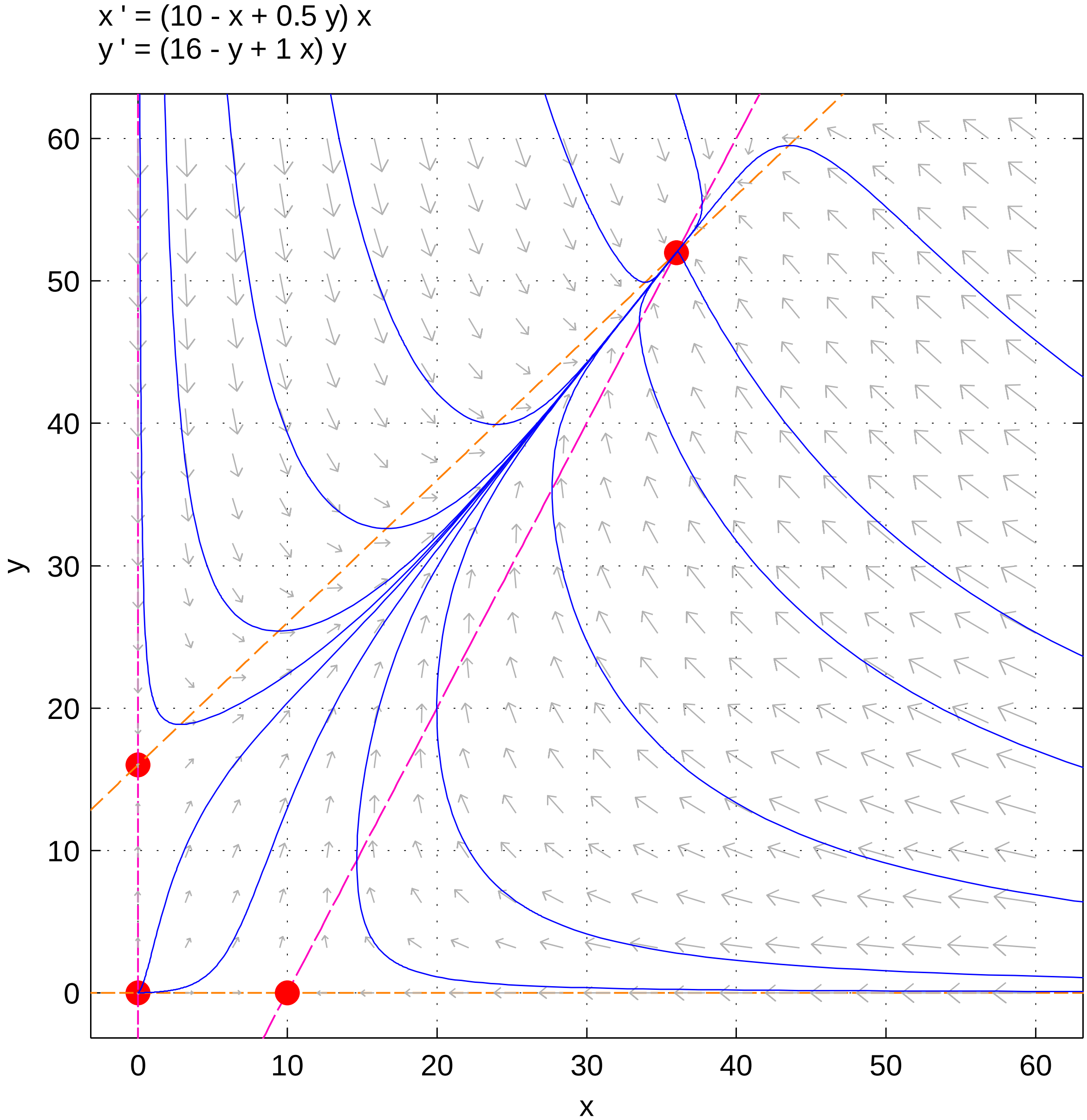
- (10,0): punto silla



- (36,52): nodo estable



(f) Luego el diagrama de fase general para $x, y \geq 0$, según los ejes x e y es:



(g) En la ecuación $x' = x(10 - x + \frac{1}{2}y)$ el efecto de los términos dentro del paréntesis son:

- El valor $+10$ determina exponencial un crecimiento en la variable x.
- El término $-x$ determina un límite en el crecimiento máximo de x.
- El término $+\frac{1}{2}y$ determina que al aumentar la variable y, aumenta el valor de x.

Para la ecuación $y' = y(16 - y + x)$.

Para ejemplicar el sentido biológico, digamos que x corresponde al número de ovejas en el sistema, mientras que y corresponde al número de conejos en el sistema. Así,en la ecuación $x' = x(10 - x + \frac{1}{2}y)$:

- El valor $+10$ determina la tasa de reproducción de las ovejas. (Para el caso de y el valor es 16, lo que significa que los conejos se reproducen más rápido que las ovejas).
- El término $-x$ determina un límite en la máxima población de ovejas (análogo para los conejos).
- El término $+\frac{1}{2}y$ determina la interacción entre las ovejas y los conejos.Es este caso, el valor positivo indica que las ovejas se benefician de la presencia de conejos en el sistema. Para el caso de los conejos, estos también se benefician de la presencia de ovejas(como el factor en ese caso es $+1$ en vez de $+\frac{1}{2}y$, los conejos se benefician más de la interacción que las ovejas). Por lo tanto, el sistema presenta una relación de cooperación

Cabe notar que los puntos críticos $(0, 0)$,$(0, 16)$ y $(10, 0)$ son inestables, lo que significa que al no haber alguna de las especies (o ambas) el sistema se encuentra en equilibrio, pero una vez que coexisten ambas especies, ninguna se extinguirá.
Por otra parte,el punto $(36, 52)$ es un equilibrio estable, por lo tanto, tras un tiempo suficientemente largo, habrán en el sistema 36 ovejas y 52 conejos. El número de conejos es mayor debido a que se reproducen más rápido y se benefician más de la interacción con las ovejas.

P2. Esboce el diagrama de fase asociado a la siguiente ecuación

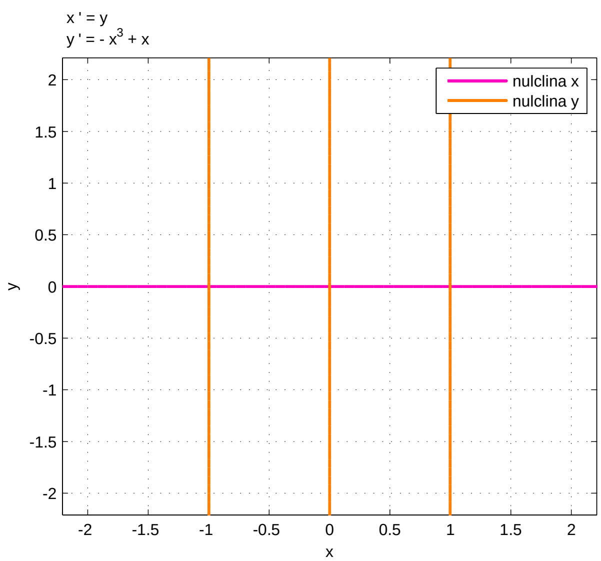
$$\ddot{x} + x^3 - x = 0$$

Este sistema corresponde a un oscilador de Duffing en su versión más simple.

Solución:
El sistema se puede escribir como:

$$\begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x - x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$$

Las nulclinas en x e y son las curvas definidas por $f(x,y) = 0$ e $f(x,y) = 0$, respectivamente. Las gráficas vienen dadas por:



Los puntos críticos se encuentran al resolver el sistema:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x - x^3 = 0 \end{cases}$$

(Notar que estos puntos corresponden a la intersección de las nulclinas de x e y). Tenemos tres soluciones:

- $\vec{x}_1 = (0,0)$
- $\vec{x}_{2,3} = (\pm 1, 0)$

Linealizaremos el sistema en torno a cada punto crítico. Para esto,se calcula el Jacobiano del sistema:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-x^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Y se evalúa en los puntos críticos:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ J(\pm 1,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de cada Jacobiano vienen dados por :

$$\vec{x}_1\text{:}\ \lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1.$$
$$\vec{x}_{2,3}\text{:}\ \lambda_1 = \sqrt{2}i,\ \lambda_2 = -\sqrt{2}i.$$

- En (0,0), los valores propios $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ son reales y de distinto signo, por lo que (0,0) es un **punto silla**, el cual es **inestable**.
- En (±1,0), los valores propios $\lambda_1 = \sqrt{2}i$, $\lambda_2 = -\sqrt{2}i$ son imaginarios puros, conjugados, por lo que (±1,0) es un **centro**.

Analizando el punto $\vec{x}_1$ en más detalle tenemos que los vectores propios son:

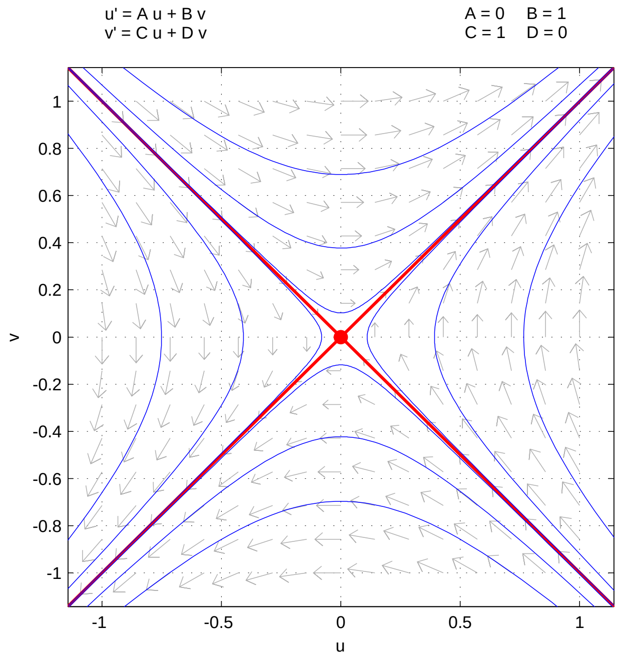
$$\lambda_1 = 1 \Rightarrow \vec{v}_1 = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\lambda_2 = -1 \Rightarrow \vec{v}_2 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

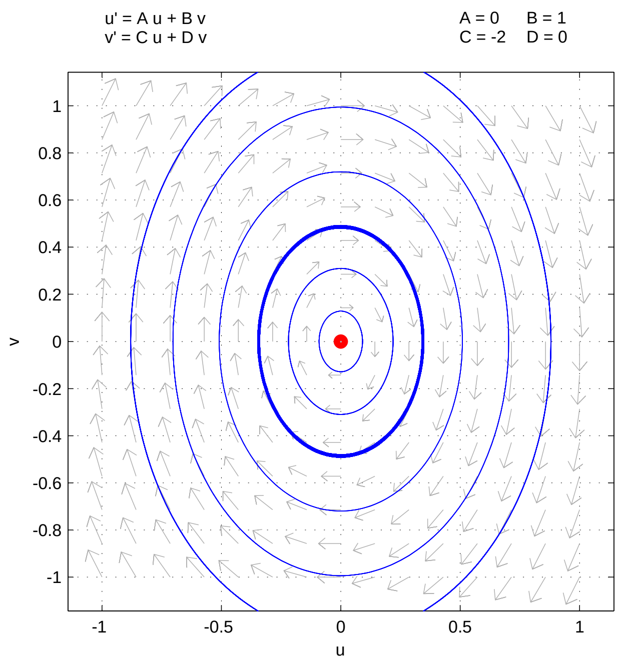
Por lo tanto, en la dirección de $\vec{v}_1$ las soluciones se alejan de $\vec{x}_1$, y en la dirección de $\vec{v}_2$ las soluciones se alejan de $\vec{x}_2$.

Los diagramas de fase en torno a los puntos críticos son los siguientes (según los ejes x e y centrados en el punto crítico):

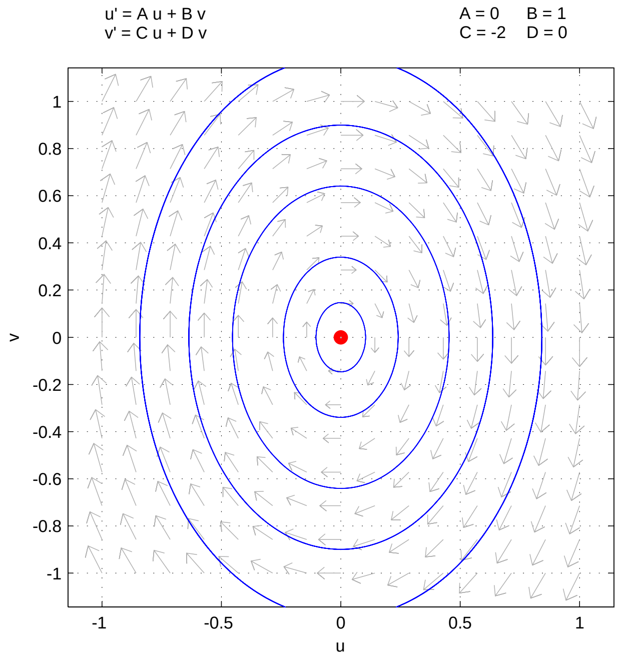
- (0,0): punto silla



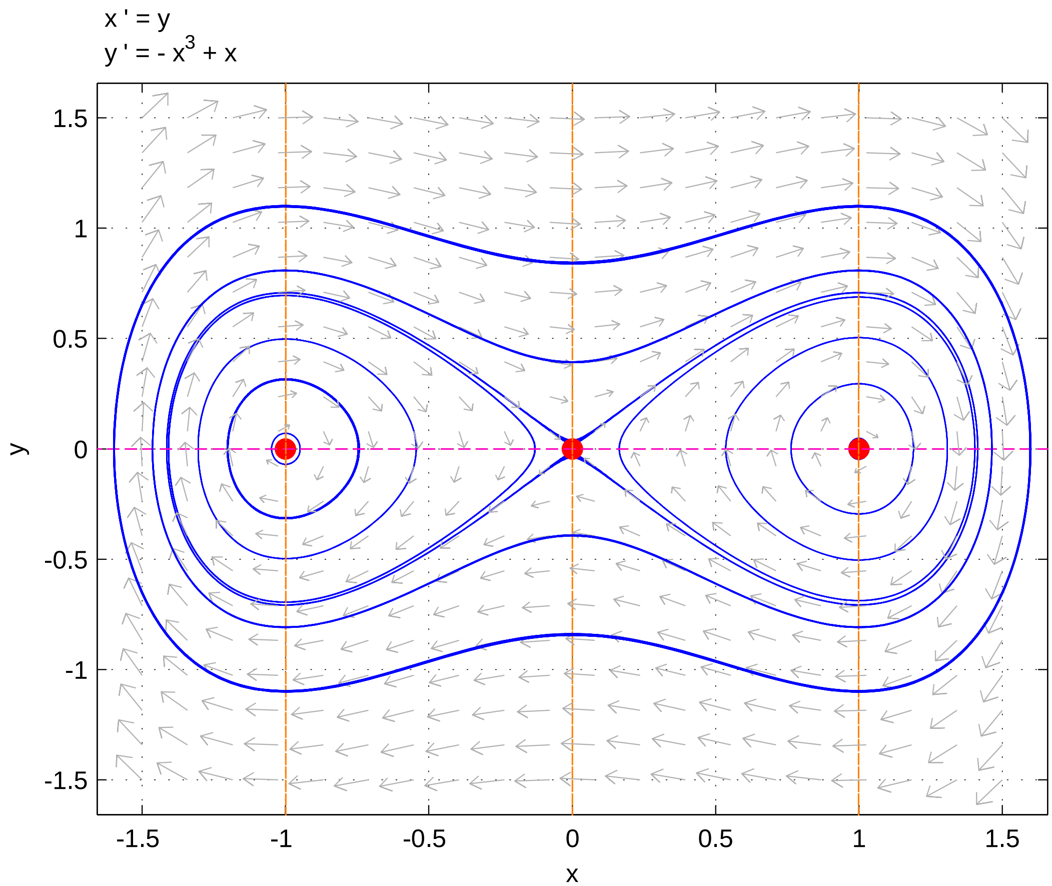
- (1,0): centro



- (-1,0): centro



Finalmente, el diagrama de fase global es de la forma siguiente:



P3. Dado el siguiente sistema

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + ax(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + ax(x^2 + y^2) \end{cases}$$

(a) Determine la estabilidad en torno al punto crítico, linealizando el sistema. Se pide analizar el sistema, incluyendo los términos no lineales. Para esto:

(b) Escriba la ecuación diferencial para coordenadas polares en r.
(Hint: Recuerde que $x^2 + y^2 = r^2$)

(c) Escriba la ecuación diferencial para coordenadas polares en θ.
(Hint: Recuerde que $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$)

(d) Escriba el sistema inicial en coordenadas polares

(e) Dibuje el espacio de fases para $a = 0$, $a = -0,1$ y $a = 0,1$.

(f) Concluya sobre el efecto de los términos no lineales en la solución

Solución:

(a) Los puntos críticos se encuentran al resolver el sistema:

$$\begin{cases} -y + ax(x^2 + y^2) &= 0 \\ x + ax(x^2 + y^2) &= 0 \end{cases}$$

Cuya única solución es $(0,0)$.
Linealizamos el sistema en torno a $(0,0)$. Para esto,se calcula el Jacobiano del sistema:

$$J(x,y) = \begin{pmatrix} 3ax^2 + ay^2 & -1 \\ 1 & ax^2 + 3ay^2 \end{pmatrix}.$$

Evaluandoen $(0,0)$:

$$J(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Cuyos valores propios son: $\lambda_1 = i$,
$\lambda_2 = -i$.
Estos valores son imaginarios puros, por lo que $(0,0)$ corresponde a un centro.
(Según el análisis del sistema lineal).

(b) Derivando $x^2 + y^2 = r^2$, con respecto a t tenemos:

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 2r\dot{r} \Rightarrow x\dot{x} + y\dot{y} = r\dot{r}$$

Reemplazando los valores de $\dot{x}$, $\dot{y}$ dados por el sistema:
$r\dot{r} = x(-y + ax(x^2 + y^2)) + y(x + ax(x^2 + y^2))$
$r\dot{r} = a(x^2 + y^2)^2$
$r\dot{r} = ar^4$

(c) Derivando $\theta = \arctan(\frac{y}{x})$, con respecto a t tenemos:

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{\left(\frac{y}{x}\right)}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x\dot{y}-\dot{x}y}{y^2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{x\dot{y}-\dot{x}y}{y^2+x^2} = \frac{x\dot{y}-\dot{x}y}{r^2}$$

Reemplazando los valores de $\dot{x}$, $\dot{y}$ dados por el sistema:

$$\dot{\theta} = \frac{x(x+ax(x^2+y^2)) - y(-y+ax(x^2+y^2)}{r^2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{(x^2+y^2)}{r^2}$$

$$\dot{\theta} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

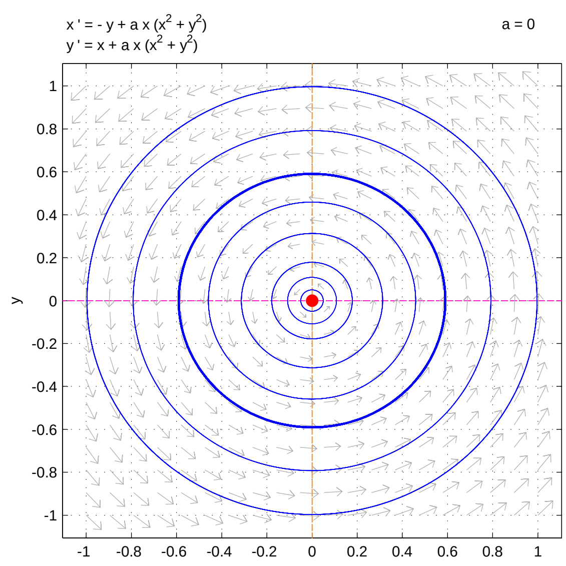
(d) Por lo tanto, el sistema escrito en coordenadas polares es:

$$\begin{cases} \dot{r} &= ar^3 \\ \dot{\theta} &= 1 \end{cases}$$

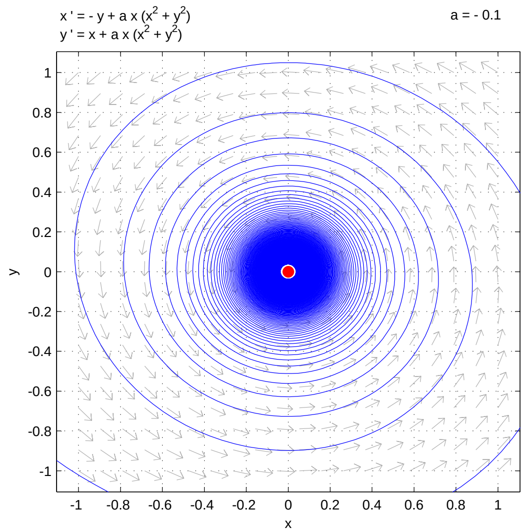
Queda un sistema fácil de analizar, al ser r y θ independientes. La variable angular tiene una "velocidad angularçonstante, mientras que el comportamiento de la variable radial depende del valor de a.

(e) Nos piden analizar tres casos:

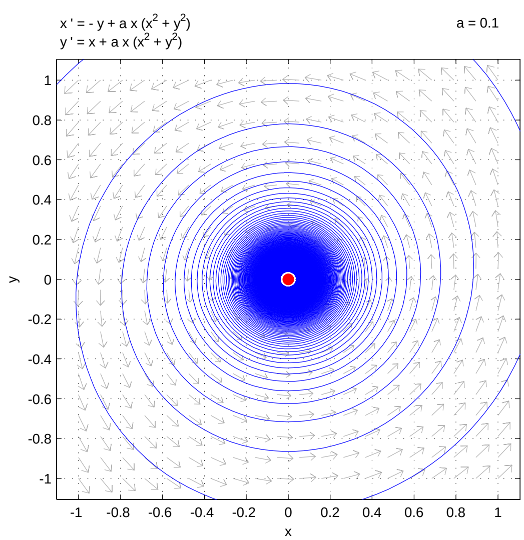
a=0) En este caso, $\dot{r} = 0$, por lo tanto, r es contante y las trayectorias en el espacio de fases son circunferencias de radio constante, y el punto $(0, 0)$ es un centro. El espacio de fases es de la forma siguiente:



a=-0.1) En este caso, $\dot{r} < 0$, por lo tanto, $r \to 0$ cuando $t \to \infty$ y las trayectorias en el espacio de fases son espirales que se alejan del centro.Por lo tanto el punto $(0,0)$ es un foco inestable. El espacio de fases es de la forma siguiente:



a=0.1) En este caso, $\dot{r} > 0$, por lo tanto, $r \to \infty$ cuando $t \to \infty$ y las trayectorias en el espacio de fases son espirales que se acercan del centro.Por lo tanto el punto $(0,0)$ es un foco estable. El espacio de fases es de la forma siguiente:



(f) Al considerar los términos no lineales del sistema, observamos que el centro que predecía la linealización se puede transformar en un foco, estable o inestable, ante pequeños cambio en el término no lineal. Esto se debe a que el centro se encuentra en un caso límite que separa ambos focos. Otro caso similar se da para los nodos degenerados (estrellas) en que una pequeña no linealidad los puede cambia a nodos o espirales. En este caso, sin embargo, la estabilidad no cambia. Para todos los otros casos (puntos sillas, nodos y espirales) los términos no lineales no cambian el tipo de atractor/repelor ni su estabilidad.