MA2601-2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2011-01
Profesor: Julio López.
Auxiliares: Sebastián Reyes Riffo, Sebastián Román.

Clase auxiliar 09
27/mayo

P2. (a) Encuentre la solución del sistema:

$$x' = x - z \tag{1}$$
$$y' = x \tag{2}$$
$$z' = x - y \tag{3}$$

Solución:

El sistema se puede escribir como $X' = AX$ con,

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora, calculamos los valores propios de A:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow p(\lambda) = (\lambda - 1)\lambda^2 + (\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$$

por lo que los valores propios son $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = i, \lambda_3 = -i$,todos con multiplicidad 1

Luego, calculamos los vectores propios Sea $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, si $\vec{v}$ es vector propio con valor propio λ debe cumplir:

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda = 1 :}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ esto implica que } v_1 = v_2 \text{ y } v_3 = 0$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ luego, el vector propio asociado a } \lambda = 1 \text{ es } \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto una solución del sistema es $X_1(t) = e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\underline{\lambda = i:}$

$$\begin{bmatrix} 1-i & 0 & -1 \\ 1 & -i & 0 \\ 1 & -1 & -i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ esto implica que } (i-1)v_1 = v_3 \text{ y } v_1 = iv_2$$

Una solución es $v_1 = i, v_2 = 1, v_3 = 1+i$

luego, el vector propio asociado a $\lambda = i$ es $\vec{v} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 1+i \end{bmatrix}$

Por lo tanto una solución del sistema es

$$X_2(t) = e^{it} \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 1+i \end{bmatrix} = (cos(t) + isen(t)) \begin{bmatrix} i \\ 1 \\ 1+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -sen(t) + icos(t) \\ cos(t) + isen(t) \\ (cos(t) - sen(t)) + i(cos(t) + sen(t)) \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda = -i:}$

De forma análoga, y considerando que es valor propio es el complejo conjugado del valor propio anterior,

el vector propio asociado a $\lambda = -i$ es $\vec{v} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 1-i \end{bmatrix}$ y la solución del sistema es

$$X_3(t) = e^{-it} \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 1-i \end{bmatrix} = (cos(t) - isen(t)) \begin{bmatrix} -i \\ 1 \\ 1-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -sen(t) - icos(t) \\ cos(t) - isen(t) \\ (cos(t) - sen(t)) - i(cos(t) + sen(t)) \end{bmatrix}$$

Sin embargo, nosotros buscamos soluciones reales. Para esto, escribimos las soluciones anteriores como

$$X_2(t) = X_R(t) + iX_I(t) \text{ y } X_3(t) = X_R(t) - iX_I(t)$$

Así,

$$X_R = \frac{1}{2}(X_2 + X_3) \text{ y } X_I = \frac{1}{2i}(X_2 - X_3)$$

$$X_R = \begin{bmatrix} -sen(t) \\ cos(t) \\ cos(t) - sen(t) \end{bmatrix} \text{ y } X_I = \begin{bmatrix} cos(t) \\ sen(t) \\ cos(t) + sen(t) \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la solución general real es

$$X(t) = c1e^t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c2 \begin{bmatrix} -sen(t) \\ cos(t) \\ cos(t) - sen(t) \end{bmatrix} + c3 \begin{bmatrix} cos(t) \\ sen(t) \\ cos(t) + sen(t) \end{bmatrix}$$

Y en coordenadas

$$x1(t) = c1e^t - c2sen(t) + c3cos(t),$$

$$x2(t) = c1e^t + c2cos(t) + c3sen(t),$$

$$x3(t) = c2(cos(t) - sen(t)) + c3(cos(t) + sen(t)),$$

(b) Considere el siguiente sistema lineal:

$$X'(t) = A(t)X(t)$$

con $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & c+2s & -s+2c \\ 0 & 1-3s^2+3sc & 1+3c^2-3sc \\ 0 & -1-3s^2-3sc & 1-3c^2-3sc \end{bmatrix}$, $P(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{bmatrix}$,

$$c = cos(t), s = sen(t)$$

.

(i) Calcule para t fijo $P^{-1}(t)$, $A(t)P(t)$ y $P'(t)$. Además obtenga una expresión para $[P^{-1}(t)]'$ en función de $P^{-1}(t)$ y $P(t)$

(ii) Sea $X(t)$ una solución del sistema anterior, muestre que $Y(t) = P^{-1}(t)X(t)$ satisface un sistema lineal a coeficientes constantes, es decir, $Y'(t) = BY(y)$ con B constante, verifique además que B es triangular superior.

(iii) determine $Y(t)$ mediante sustitución.

(iv) Determine $X(t)$.

Solución:

(i) Se ve que la matriz P rota el sistema en un ángulo t en torno al eje x. Por lo tanto P es unitaria. Además, es fácil ver que

$$P^{-1}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & -s \\ 0 & s & c \end{bmatrix}$$

$$A(t)P(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & c-s & 4c-2s \\ 0 & -c-s & -2c-4s \end{bmatrix}$$

$$P'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -s & c \\ 0 & -c & -s \end{bmatrix}$$

Además como P es unitaria, $P^{-1}(t)P(t) = I \Rightarrow [P^{-1}(t)]'P(t) + P^{-1}(t)P'(t) = 0$
Finalmente $[P^{-1}(t)]' = -P^{-1}(t)P'(t)P^{-1}(t)$

(ii) Como $Y(t) = P^{-1}(t)X(t) \Rightarrow Y(t) = [P^{-1}(t)]'X(t) + P^{-1}(t)X'(t)$,
pero $[P^{-1}(t)]' = -P^{-1}(t)P'(t)P^{-1}(t)$ y $X'(t) = A(t)X(t)$, luego

$$Y(t) = -P^{-1}(t)P'(t)P^{-1}(t)X(t) + P^{-1}(t)A(t)X(t) = P^{-1}(t)\{-P'(t) + A(t)P(t)\}Y(t)$$

por la parte anterior obtenemos que:

$$B = P^{-1}(t)\{-P'(t) + A(t)P(t)\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

(iii) Con lo anterior vemos que:

$$
\begin{align}
y_3'(t) &= -2y_3(t) \Rightarrow y_3(t) = k_3 e^{-2t} \tag{4}\\
y_2'(t) &= y_2(t) + 3y_3(t) \Rightarrow y_2(t) = k_2 e^{t} - k_3 e^{-2t} \tag{5}\\
y_1'(t) &= y_1(t) + y_2(t) + 2y_3(t) \Rightarrow y_3(t) = k_1 e^{t} + k_2 e^{t} - \frac{k_3}{3} e^{-2t} \tag{6}\\
& \tag{7}
\end{align}
$$

Con $k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}$ constantes.

(iv) Como $X(t) = P(t)Y(t)$, sustituimos

$$
\begin{align}
x_1(t) &= k_1 e^{t} + k_2 e^{t} - \frac{k_3}{3} e^{-2t} \tag{8}\\
x_2(t) &= k_2 c e^{t} + k_3 (s - c) e^{-2t} \tag{9}\\
x_3(t) &= -k_2 s e^{t} + k_3 (s + c) e^{-2t} \tag{10}\\
& \tag{11}
\end{align}
$$