Guía de Ejercicios

1. Pruebe que las siguientes funciones son de orden exponencial y encuentre sus transformadas de Laplace por definición:

   (a) $f(t) = t^n \mathrm{senh}(at)$.

   (b) $f(t) = te^t \cos(t)$.

   (c) $f(t) = e^{-t} P_{ab}(t)$, con $a \leq b$.

   (d) $f(t) = tP_{01}(t) + H(t-1)$.

   (e) $f(t) = (t+a)P_{-a0}(t) + (a-t)P_{0a}(t)$, con $a > 0$.

2. Determine si existe una función $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ de orden exponencial y continua por pedazos tal que

$$\mathcal{L}(g)(s) = \frac{1}{(s^2+1)^{1/4}}.$$

3. La función gamma $\Gamma(x)$ se define como

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

   (a) Verifique que la integral converge para todo $x > 0$.

   (b) Usando integración por partes, pruebe que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ para todo $x > 0$.

   (c) Deduzca que $\Gamma(n+1) = n!$ si $n \in \mathbb{N}$.

   (d) Sea $\alpha > -1$. Demuestre que

$$\mathcal{L}(t^\alpha)(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.$$

   (Hint: Hacer $t = us$ en la integral que define la función Γ).

4. Suponga que f es continua por pedazos y de orden exponencial tal que $f(0) = 0$ y es solución de la ecuación integro-diferencial

$$f'(t) = \mathrm{sen}(t) + \int_0^t f(t-\beta)\cos(\beta) d\beta.$$

   Aplicando transformada de Laplace, determine la función f.

5. Sea $a > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Denotaremos por $L_n = \mathcal{L}(\mathrm{sen}^n(at))$. Queremos calcular L_n, para cada $n \in \mathbb{N}$.

   (a) Calcular L_1 y L_2.

   (b) Pruebe que $L_n = L_{n-2} - \mathcal{L}(\mathrm{sen}^{n-2}(at)\cos^2(at))$ para cada $n \geq 3$.

   (c) Muestre que

$$\mathcal{L}(\mathrm{sen}^{n-2}(at)\cos^2(at))(s) = (\frac{s^2}{a^2 n(n-1)} + \frac{1}{n-1})L_n,$$

   para cada $n \geq 3$. (Hint: Integrar por partes identificando derivadas de $\mathrm{sen}^{n-1}(at)$ y $\mathrm{sen}^n(at)$).

(d) Deduzca que $L_n = \frac{a^2 n(n-1)}{s^2+a^2n^2} L_{n-2}$ si $n \geq 3$ y escriba una fórmula cerrada para L_n.

(e) Encuentre una fórmula de convolución para $\operatorname{sen}^n(at)$ en función de $\operatorname{sen}^{n-2}(at)$.

6. Dada una función $y \in \mathcal{C}([0,1])$, definimos su **Transformada Mellin** en $s > 0$ mediante:

$$M[y](s) = \int_0^1 x^{s-1} y(x) dx,$$

cuando este límite exista.

(a) Demuestre que $M[1] = \frac{1}{s}$ y que $M[x^a y](s) = M[y](s+a)$ para cada $a \in \mathbb{R}$.

(b) Suponga que para cada $s > 0$ la función y satisface

$$\lim_{x \to 0^+} x^s y(x) = 0.$$

Demuestre que $M[xy'] = -sM[y] + y(1)$.

(c) Defina $z(x) = \int_x^1 \frac{y(u)}{u} du$. Use la parte anterior para demostrar que $M[z] = \frac{1}{s} M[y]$.

(d) Resuelva la siguiente EDO usando la transformada de Mellin y las propiedades demostradas en los puntos anteriores:

$$x(xy')' + 2xy' = 1, \; y(1) = 0, \; y'(1) = 0.$$

(Hint: Puede asumir que si $M[f] = M[g]$ entonces $f = g$.)

7. Sean $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ y $\omega \neq 0$. Use la transformada de Laplace para probar la igualdad:

$$t^n * \operatorname{sen}(\omega t) = \frac{\omega}{n+1} t^{n+1} * \cos(\omega t).$$

(Hint: Le puede ayudar el Teorema de Lerch.)

8. Calcular, usando transformadas de Laplace, las siguientes integrales:

(a) $\int_0^\infty \frac{1}{t}(e^{-t} - e^{-3t}) dt$.

(b) $\int_0^\infty e^{-t^2} dt$.

(c) $\int_0^\infty t(1 - e^{-\frac{t}{2}} + e^{-2t}) \cos(t) dt$.

9. Usando transformada de Laplace encuentre una solución no nula de los siguientes problemas de valor inicial:

(a) $\begin{cases} ty'' + (t-1)y' + y = 0 \\ y(0) = 0. \end{cases}$

(b) $\begin{cases} y'' + ty' - 3y = 0 \\ y(0) = 0, \; y'(0) = 1. \end{cases}$

(c) $\begin{cases} ty'' + 4y' + 9ty = \cos(3t), \; t > 0 \\ y(0) = 0, \; y'(0) = 1/4. \end{cases}$

(d) $\begin{cases} ty'' - 2y' + ty = f(t) \\ y(0) = 0, \; y(\frac{\pi}{2}) = 0, \end{cases}$ con $f(t) = \begin{cases} -\operatorname{sen}(t), & 0 \leq t < \pi \\ -\cos(t), & t \geq \pi. \end{cases}$

(Hint: Recuerde que $\frac{d^n}{ds} F(s) = (-1)^n \mathcal{L}(t^n f(t))(s)$ donde $F(s) = \mathcal{L}(f)(s)$).

10. Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left[\arctan\left(\frac{3}{s+2}\right)\right]$.

11. Determine $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right]$ usando la fórmula de convolución.

12. Resuelva las siguientes ecuaciones usando la transformada de Laplace:

    (a) $ty'' - 2y' + ty = 0$, $y(0) = 0$.

    (b) $y'' + 2y' + y = f(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

    (c) $y'' + 4y = e^{-2t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

    (d) $y'' + \pi^2 y + 2\pi \text{sen}(\pi t) = 0$, $y(0) = y'(0) = -1$.

    (e) $y'' - 3y' + 2y = 2e^{3t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

13. Resuelva las siguientes ecuaciones de convolución:

    (a) $y(t) = 1 + \int_0^t y(\tau)\cos(t-\tau)d\tau$.

    (b) $y(t) = \cos(t) + \int_0^t e^{-\tau} y(t-\tau)d\tau$.

    (c) $H(t)\cos(t) * y(t) = tH(t)$.

    (d) $H(t) * y'(t) + ty(t) = \delta(t)$.

14. Considere la ecuación

$$my'' + ky = g(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t \le a \\ 1/\varepsilon & , \quad a < t \le a+\varepsilon \\ 0 & , \quad t \ge a+\varepsilon, \end{cases}$$

    con condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$.

    (a) Resuelva la ecuación usando la transformada de Laplace.

    (b) Para cada $t \ge 0$ define $z(t) = \lim_{\varepsilon \to} y(t)$. Pruebe que z satisface la ecuación

$$mz'' + kz = 0, \quad \text{con } z(a) = 0,\ z'(a) = 1/m.$$

15. Resolver, utilizando la Transformada de Laplace, el problema de Cauchy:

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y - 2\int_0^t y(u)du = 5,\ t > 0 \\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

16. Resolver, utilizando transformadas de Laplace, los siguientes sistema de ecuaciones diferenciales:

    (a) $\begin{cases} x' = 2x - 3y + 4 - 2t \\ y' = x - 2y + 2 - t \\ x(0) = -1,\ y(0) = 0,\ t \ge 0. \end{cases}$

    (b) $\begin{cases} x' = -7x - 6y + t \\ y' = 12x + 10y \\ x(3) = 1,\ y(3) = -8. \end{cases}$

    (c) $\begin{cases} x' + 2x + 6\int_0^t y(u)du = -2 \\ x' + y' + y = 0 \\ x(0) = -5,\ y(0) = 6. \end{cases}$

    (d) $\begin{cases} x' - y = \begin{cases} 1, \text{ si } 0 < t < 1 \\ 0, \text{ si } t \ge 1 \end{cases} \\ y' - x = \begin{cases} 0, \text{ si } 0 < t < 2 \\ 1, \text{ si } t \ge 2 \end{cases} \\ x(0) = 0,\ y(0) = 0. \end{cases}$

17. Dada la función $f(t) = n$, si $(n+1)\alpha < t < n\alpha$, para $n \geq 1$, siendo α un número real positivo y no nulo, se pide:

    (a) Trazar su gráfica y obtener para $f(t)$ una fórmula que la exprese como una serie cuyos términos sean funciones de Heaviside.

    (b) Calcular la transformada de Laplace de $f(t)$.

18. Dada la función

$$f(t) = \begin{cases} 0, \text{ si } 4ka < t < (4k+2)a, \ k \geq 0, \\ a, \text{ si } (4k+2)a < t < 4(k+1)a, \ k \geq 0, \end{cases}$$

    con $a > 0$, se pide:

    (a) Obtener su transformada de Laplace.

    (b) Resolver el problema de Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = f(t)(H(t) - H(t-3a)), \\ y(0) = y'(0) = 2. \end{cases}$$