MA2601-2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2011-01

Profesor: Julio López.

Auxiliares: Sebastián Reyes Riffo, Sebastián Román.

Pauta Control 2
27/abril

P1.

(a) ya que $x(t)$ es solución de $\begin{cases} x'(t) &= f(t,x) \\ x(0) &= x_0 \end{cases}$, se puede escribir de la forma

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(s, x(s))ds, \tag{1}$$

y de manera análoga para $y(t)$:

$$y(t) = y_0 + \int_0^t g(s, y(s))ds. \tag{2}$$

Al restar (1) y (2) se obtiene

$$x(t) - y(t) = x_0 - y_0 + \int_0^t \big[f(s, x(s)) - g(s, y(s))\big]ds$$

y luego, aplicando $|\cdot|$ en la igualdad y por desigualdad triangular:

$$|x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0| + \int_0^t \big|f(s, x(s)) - g(s, y(s))\big|ds.$$

(0.8 pto.)

Ya que f es Lipschitz, el integrando se puede acotar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \big|f(s,x) - g(t,y)\big| &= \big|f(s,x) - f(s,y) + f(s,y) - g(s,y)\big| \\ &\leq \big|f(s,x) - f(s,y)\big| + \big|f(s,y) - g(t,y)\big| \\ &\leq L|x-y| + \sup_{(s,y)\in U} \big|f(s,y) - g(s,y)\big| \leq L|x-y| + M \end{aligned}$$

y usando esto en la última desigualdad, se obtiene que

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &\leq |x_0 - y_0| + \int_0^t (L|x(s) - y(s)| + M)ds \\ |x(t) - y(t)| &\leq \big(|x_0 - y_0| + Mt\big) + \int_0^t L|x(s) - y(s)|ds \end{aligned} \tag{3}$$

(0.7 pto.)

<u>**1ra Forma:**</u>

Recordamos la *desigualdad de Gronwall (generalizada):*
sean $\kappa : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ *y* u, $w : [0,T] \to \mathbb{R}$ *funciones continuas. Si* u *satisface*

$$u(t) \leq w(t) + \int_0^t \kappa(s)u(s)ds \qquad \forall t \in [0,T]$$

entonces

$$u(t) \leq w(t) + \int_0^t \kappa(s)w(s)\exp\left(\int_s^t \kappa(z)dz\right)ds$$

Si identificamos

$$u(t) = |x(t)-y(t)|,\ w(t) = |x_0-y_0| + Mt,\ \kappa(t) = L > 0,$$

notamos que u, v, w son funciones que satisfacen las hipótesis de la *desigualdad de Gronwall*, por lo tanto al aplicarla en (3) se obtiene

$$\begin{aligned} |x(t)-y(t)| &\leq |x_0-y_0| + Mt + \int_0^t L(|x_0-y_0| + Ms)\exp\left(\int_s^t Ldz\right)ds \\ &\leq |x_0-y_0| + Mt + Le^{Lt}\left(|x_0-y_0|\int_0^t e^{-Ls}ds + M\int_0^t se^{-Ls}ds\right) \end{aligned} \tag{4}$$

(1.0 pto.)

Finalmente, calculando las integrales presentes en (4):

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-Ls}ds &= \frac{1-e^{-Lt}}{L} \\ \int_0^t se^{-Ls}ds &= -\frac{te^{-Lt}}{L} + \int_0^t \frac{e^{-Ls}}{L}ds = -\frac{te^{-Lt}}{L} + \frac{1-e^{-Lt}}{L^2} \end{aligned}$$

y reemplazándolas en esa ecuación, se concluye que

$$\begin{aligned} |x(t)-y(t)| &\leq |x_0-y_0| + Mt + Le^{Lt}\left(|x_0-y_0|\frac{1-e^{-Lt}}{L} + M\left(-\frac{te^{-Lt}}{L} + \frac{1-e^{-Lt}}{L^2}\right)\right) \\ &\leq |x_0-y_0| + Mt + |x_0-y_0|(e^{Lt}-1) - Mt + M\frac{e^{Lt}-1}{L} \\ &\leq |x_0-y_0|e^{Lt} + \frac{M}{L}(e^{Lt}-1) \end{aligned}$$

(0.5 pto.)

<u>2da Forma:</u>

$$|x(t)-y(t)| \leq |x_0-y_0| + \int_0^t (L|x(s)-y(s)|+M)ds \Leftrightarrow |x(t)-y(t)| \leq |x_0-y_0| + \int_0^t L\left(|x(s)-y(s)| + \frac{M}{L}\right)ds,$$

$$\Leftrightarrow |x(t)-y(t)| + \frac{M}{L} \leq |x_0-y_0| + \frac{M}{L} + \int_0^t L\left(|x(s)-y(s)| + \frac{M}{L}\right)ds.$$

Recordamos la *desigualdad de Gronwall:*
Sean $\kappa : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ *y* $u : [0,T] \to \mathbb{R}$ *funciones continuas. Si existe* $\alpha \geq 0$ *tal que se satisface*

$$u(t) \leq \alpha + \int_0^t \kappa(s)u(s)ds, \qquad \forall t \in [0,T],$$

entonces

$$u(t) \leq \alpha \exp\left(\int_0^t \kappa(z)dz\right).$$

Si identificamos $u(t) = |x(t) - y(t)| + \frac{M}{L}$, $\alpha = |x_0 - y_0| + \frac{M}{L}$ y $\kappa(s) = L > 0$, entonces por la Desigualdad anterior deducimos que:

$$u(t) \leq \alpha \exp(\int_0^t Ldz) \Leftrightarrow |x(t) - y(t)| + \frac{M}{L} \leq (|x_0 - y_0| + \frac{M}{L}) \exp(Lt)$$
$$\Leftrightarrow |x(t) - y(t)| \leq |x_0 - y_0|e^{Lt} + \frac{M}{L}(e^{Lt} - 1).$$

(b) (i) Si se considera el cambio de variable $x = e^t$, las derivadas (con respecto a t) de $z(t) = y(x)$ valen:

$$\dot{z} = \frac{dz}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = y'x$$
$$\ddot{z} = \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}x\right) = \frac{d^2y}{dx^2}\frac{dx}{dt}x + \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = y''x^2 + y'x$$

con esto, la EDO de segundo orden a coeficientes variables queda de la forma:

$$a_2x^2y'' + a_1xy' + a_0y = 0 \qquad x > 0,\ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R},\ a_2 \neq 0$$
$$a_2(x^2y'' + xy') + (a_1 - a_2)xy' + a_0y = 0$$
$$a_2\ddot{z} + (a_1 - a_2)\dot{z} + a_0z = 0 \qquad t \in \mathbb{R},\ a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R},\ a_2 \neq 0 \tag{5}$$

que corresponde a una EDO a coeficientes constantes, para la variable $z(t)$.

(1.5 pto.)

(ii) Las raíces del polinomio característico de (5) están dadas por

$$\lambda = \frac{(a_2 - a_1) \pm \sqrt{\Delta}}{2a_2}$$

con $\Delta = (a_1 - a_2)^2 - 4a_2a_0$. Es claro que la naturaleza de las raíces de $p(\lambda)$ depende de los valores de Δ, por ende se distinguen 3 casos posibles:

- $\underline{\Delta > 0}$:

las raíces de $p(\lambda)$ son reales y distintas, y corresponden a

$$\lambda_1 = \frac{(a_2 - a_1) + \sqrt{\Delta}}{2a_2},\ \lambda_2 = \frac{(a_2 - a_1) - \sqrt{\Delta}}{2a_2}$$

Por lo tanto, la base de la solución homogénea de (5) es $\{\exp(\lambda_1t),\ \exp(\lambda_2t)\}$. Para expresarla en términos de x, recordamos que $t = \ln x$ y a continuación para $k = 1, 2$:

$$\exp(\lambda_kt) = \exp(\lambda_k \ln x) = \exp(\ln x^{\lambda_k}) = x^{\lambda_k}.$$

Con esto, el sistema fundamental buscado (con respecto a x) es

$$\{x^{\lambda_1},\ x^{\lambda_2}\}.$$

(0.5 pto.)

- $\underline{\Delta = 0}$:
  $p(\lambda)$ posee una única raíz real de multiplicidad algebraica 2, de la forma $\lambda = \dfrac{a_2 - a_1}{2a_2}$. Luego la base de la solución homogénea es $\{\exp(\lambda t),\ t\exp(\lambda_1 t)\}$, que expresada en términos de x (de manera análoga al caso anterior) es
  $$\{x^\lambda,\ \ln(x)x^\lambda\}.$$
  (0.5 pto.)

- $\underline{\Delta < 0}$:
  $p(\lambda)$ posee dos raíces complejas y conjugadas, que denotamos por $\lambda = \alpha \pm i\beta$, con $\alpha = \dfrac{a_2 - a_1}{2a_2}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2a_2}$. Es claro que el sistema fundamental en (5) está dado por $\{\exp(\alpha t)cos(\beta t),\ \exp(\alpha t)sen(\beta t)\}$, que expresado en términos de x corresponde a
  $$\{x^\alpha cos(\beta\ln(x)),\ x^\alpha sen(\beta\ln(x))\}.$$
  (0.5 pto.)

P2. (a) Asociada a la ED homogénea tenemos el siguiente polinomio característico

$$(*)\qquad p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + b.$$

Las raíces de este polinomio son: $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-b}$. Dependiendo del valor de la constante $b \in \mathbb{R}$, se tiene los siguientes casos:

- Si $b = 1$, entonces $\lambda_{1,2} = -1$. Por lo que el conjunto fundamental es $\{e^{-t}, te^{-t}\}$. Por tanto, la solución de la ED homogénea asociada es:
  $$y_h(t) = c_1e^{-t} + c_2te^{-t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
- Si $b - 1 < 0$, las raíces son reales y distintas. Por lo que el conjunto fundamental es $\{e^{-(1+\sqrt{1-b})t}, e^{(-1+\sqrt{1-b})t}\}$. Por tanto, la solución de la ED homogénea asociada es:
  $$y_h(t) = c_1e^{-(1+\sqrt{1-b})t} + c_2e^{(-1+\sqrt{1-b})t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$
- Finalmente, si $b - 1 > 0$, las raíces son complejas y conjugadas, y son de la forma: $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{b-1}i$. Por lo que el conjunto fundamental es
  $$\{e^{-t}\cos((\sqrt{b-1})t), e^{-t}\text{sen}((\sqrt{b-1})t)\}.$$
  Por tanto, la solución de la ED homogénea asociada es:
  $$y_h(t) = c_1e^{-t}\cos((\sqrt{b-1})t) + c_2e^{-t}\text{sen}((\sqrt{b-1})t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(b) Consideremos el caso $b > 1$. Por la parte anterior, vemos que en este caso la solución de la ED homogénea asociada es:

$$y_h(t) = c_1e^{-t}\cos((\sqrt{b-1})t) + c_2e^{-t}\text{sen}((\sqrt{b-1})t), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Ahora encontremos la solución particular y_p. Para esto, consideremos $q_1(t) = te^{-t}\text{sen}((\sqrt{b-1})t)$ y $q_2(t) = t^2e^{-t}\cos(2(\sqrt{b-1})t)$. En el 1er caso, identificamos las variables, dadas en clase, $\alpha = -1$, $\beta = \sqrt{b-1}$, $P(t) = t$ y $Q(t) = 0$. De esto último deducimos que $k = \text{máx}\{\text{grad}P, \text{grad}Q\} = 1$. Además, $\alpha \pm i\beta = -1 \pm \sqrt{b-1}i$ es raíz del polinomio característico $(*)$, por lo que la solución particular buscada en este caso tiene la siguiente forma:

$$y_{p_1}(t) = te^{-t}[(A_1t + B_1)\cos((\sqrt{b-1})t) + (C_1t + D_1)\text{sen}((\sqrt{b-1})t)], \quad A_1, B_1, C_1, D_1 \in \mathbb{R}.$$

De forma análoga, identificamos las variables en el 2do caso: $\alpha = -1$, $\beta = 2\sqrt{b-1}$, $P(t) = 0$ y $Q(t) = t^2$. Por lo que $k = \text{máx}\{\text{grad}P, \text{grad}Q\} = 2$. Como $\alpha \pm i\beta = -1 \pm 2\sqrt{b-1}i$ no es raíz del polinomio característico $(*)$, entonces la solución particular buscada en este caso tiene la siguiente forma:

$$y_{p_2}(t) = e^{-t}[(A_2t^2+B_2t+C_2)\cos(2(\sqrt{b-1})t)+(D_2t^2+E_2t+F_2)\text{sen}(2(\sqrt{b-1})t)],\ A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2 \in \mathbb{R}.$$

De ambos casos, deducimos que la solución particular de ED no homogénea es:

$$y_p(t) = y_{p_1}(t) + y_{p_2}(t).$$

Observación: Note que las constantes que aparecen en la solución particular, se deben de encontrar en cualquier ejercicio, pero en este caso no se pide que sean calculados.

(c) Para tener la solución la solución general de la ED no homogénea, tenemos que restringirnos al caso $b > 1$, pues de lo contrario, el lado derecho de la ED no homogénea no esta definida en $\mathbb{R}$. Según la parte (a) y (b), la solución general tiene la forma (en este caso):

$$\begin{aligned} y(t) &= c_1e^{-t}\cos((\sqrt{b-1})t) + c_2e^{-t}\text{sen}((\sqrt{b-1})t) + \\ &\quad te^{-t}[(A_1t + B_1)\cos((\sqrt{b-1})t) + (C_1t + D_1)\text{sen}((\sqrt{b-1})t)] + \\ &\quad e^{-t}[(A_2t^2 + B_2t + C_2)\cos(2(\sqrt{b-1})t) + (D_2t^2 + E_2t + F_2)\text{sen}(2(\sqrt{b-1})t)], \end{aligned}$$

donde $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ y las demás constantes son de la solución particular (que son fijas). Ahora veamos que pasa cuando $t \to +\infty$. Sabemos que las funciones $\cos(mt)$ y $\text{sen}(nt)$ son acotadas para todo $t \in \mathbb{R}$. También que la función exponencial crece más rápido que las funciones lineales y cuadráticas (funciones que aparecen en la sol. general), por lo que cuando hacemos $t \to +\infty$ vemos que $y(t) \to 0$. Por tanto, la solución $y(t) \to 0$ cuando $t \to +\infty$ en el caso $b > 1$.
Los otros casos no los tomamos en cuenta, pues, como mencionamos anteriormente, no estaría bien definido el término no homogéneo. En estos casos, solo se podría analizar el comportamiento de la solución homogénea y_h cuando $t \to +\infty$. (Esto pueden hacerlo como ejercicio).

P3.

(a) (i) Sea $y_1(x) = x^\alpha\text{sen}(x)$ una solución de la EDO homogénea con $\alpha \in \mathbb{R}$ a determinar. Para determinar este parámetro, sustituiremos esta solución en la EDO homogénea asociada. Para esto, vemos que la 1ra y 2da derivada están dadas por:

$$\begin{aligned} y_1'(x) &= \alpha x^{\alpha-1}\text{sen}(x) + x^\alpha\cos(x) \\ y_2'(x) &= \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\text{sen}(x) + 2\alpha x^{\alpha-1}\cos(x) - x^\alpha\text{sen}(x). \end{aligned}$$

Luego,

$$4x^2\left(\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}\text{sen}(x)+2\alpha x^{\alpha-1}\cos(x)-x^{\alpha}\text{sen}(x)\right)+$$
$$4x(\alpha x^{\alpha-1}\text{sen}(x)+x^{\alpha}\cos(x))+(4x^2-1)x^{\alpha}\text{sen}(x)=0.$$

Simplificando y asociando esta expresión nos resulta:

$$(4\alpha(\alpha-1)+4\alpha-1)x^{\alpha}\text{sen}(x)+(8\alpha+4)x^{\alpha+1}\cos(x)=0.$$

De aquí se deduce que:

$$4\alpha^2-1=0 \quad \text{y} \quad 2\alpha+1=0.$$

De ambas expresiones, concluimos que $\alpha=-\frac{1}{2}$. Por tanto, $y_1(x)=x^{-\frac{1}{2}}\text{sen}(x)$.

(1.0 pto.)

(ii)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{y_1}\right)=\frac{y'y_1-yy_1'}{y_1^2}=\frac{W(y_1,y)(x)}{y_1^2}, \quad \text{pues } W(y_1,y)=\begin{vmatrix} y_1 & y \\ y_1' & y' \end{vmatrix}. \tag{6}$$

(0.4 pto.)

Por otra parte, de la fórmula de Abel, vemos que $W(y_1,y)(x)=C\exp(-\int p_1(x)dx)$ al considerar la ED de la forma: $y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$. Ahora, normalizando nuestra eso ED homogénea asociada nos da:

$$y''+\frac{1}{x}y'+(1-\frac{1}{4x^2})y=0.$$

De aquí vemos que $p_1(x)=\dfrac{1}{x}$. Luego, el Wronskiano es

$$W(y_1,y)(x)=C\exp(-\int\frac{1}{x}dx)=C\exp(-\ln(x))=\frac{C}{x}.$$

Reemplazando en (6) y teniendo en cuenta que $y_1(x)=x^{-\frac{1}{2}}\text{sen}(x)$ se tiene:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{y}{y_1}\right)=\frac{C}{x}\frac{1}{y_1^2}=C\ \csc^2(x).$$

(0.6 pto.)

Integrando nos da

$$\frac{y}{y_1}=C\int\csc^2(x)dx=-C\cot(x)+C_1, \quad C,C_1\in\mathbb{R}.$$

De aquí obtenemos:

$$y(x)=-C\cot(x)y_1+C_1y_1=C_2x^{-1/2}\cos(x)+C_1x^{-\frac{1}{2}}\text{sen}(x), \quad C_2,C_1\in\mathbb{R}.$$

Esta es la solución general de la ED homogénea asociada, que denotaremos por y_h. De aquí deducimos que la 2da solución que es LI con y_1, es $y_2(x)=x^{-1/2}\cos(x)$.

(0.5 pto.)

(iii) Ahora buscaremos la solución particular de la forma $y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$, donde las funciones u_1, u_2 son las funciones incógnitas a determinar y el término homogéneo es $q(x) = x^{-1/2}$. Para ello usaremos variación de Parámetros. Vemos que

$$u_1'(x) = \frac{1}{W(y_1,y_2)(x)} \begin{vmatrix} 0 & x^{-1/2}\cos(x) \\ x^{-1/2} & -x^{-\frac{1}{2}}(\text{sen}(x) + \frac{1}{2x}\cos(x)) \end{vmatrix} = -\frac{1}{W(y_1,y_2)(x)} x\cos(x)$$
$$u_2'(x) = \frac{1}{W(y_1,y_2)(x)} \begin{vmatrix} x^{-\frac{1}{2}}\text{sen}(x) & 0 \\ x^{-\frac{1}{2}}(\cos(x) - \frac{1}{2x}\text{sen}(x)) & x^{-1/2} \end{vmatrix} = \frac{1}{W(y_1,y_2)(x)} x\,\text{sen}(x)$$

donde un calculo directo nos da que el Wronskiano es $W(y_1, y_2)(x) = -\dfrac{1}{x}$ (Esto se calcula por definición). Por lo tanto,

$$u_1'(x) = \cos(x), \quad u_2'(x) = -\text{sen}(x).$$

Integrando nos da:

$$u_1(x) = \text{sen}(x), \quad u_2(x) = \cos(x).$$

Con estos valores, obtenemos:

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) = x^{-1/2}\text{sen}^2(x) + x^{-1/2}\cos^2(x) = x^{-1/2}.$$

Por tanto, la solución general de la ED no homogénea es:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_2x^{-1/2}\cos(x) + C_1x^{-\frac{1}{2}}\text{sen}(x) + x^{-1/2}.$$

(b) Sea $f(t) = e^{\alpha t}(1 + 2\cos^2(\frac{wt}{2}))$, con $\alpha, w \in \mathbb{R}$. Recordemos que $\cos^2(\theta) = \frac{1}{2}(1+\cos(2\theta))$. Teniendo en cuenta esto, nuestra función f se escribe como

$$f(t) = 2e^{\alpha t} + e^{\alpha t}\cos(wt).$$

(0.3 pto.)

Por otra parte, de la forma de Euler vemos que $\cos(wt) = \frac{1}{2}(e^{(wt)i} + e^{-(wt)i})$. Por tanto,

$$f(t) = 2e^{\alpha t} + \frac{1}{2}\left(e^{(\alpha+wi)t} + e^{(\alpha-wi)t}\right).$$

(0.3 pto.)

Ahora, apliquemos Transformada de Laplace a esta f, y usemos la linealidad:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = 2\mathcal{L}[e^{\alpha t}](s) + \frac{1}{2}\left(\mathcal{L}[e^{(\alpha+wi)t}](s) + \mathcal{L}[e^{(\alpha-wi)t}](s)\right).$$

Recordemos que $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \dfrac{1}{s-a}$, para $s >$Re(a). Usando esto, la expresión anterior se escribe como:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = 2\frac{1}{s-\alpha} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(s-\alpha)-wi} + \frac{1}{(s-\alpha)+wi}\right)$$

Luego,

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{2}{s-\alpha} + \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+w^2}, \quad s > \alpha.$$

(0.9 pto.)