MA2601-2 Ecuaciones Diferenciales Ordinarias. Semestre 2011-01
Profesor: Julio López.
Auxiliares: Sebastián Reyes Riffo, Sebastián Román.

Clase auxiliar 06: Transformada de Laplace
29/abril

1. Transformadas útiles.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{1\}(s) &= \frac{1}{s} & \mathcal{L}\{sen(kt)\}(s) &= \frac{k}{s^2+k^2} \\ \mathcal{L}\{t^n\}(s) &= \frac{n!}{s^{n+1}} \quad s>0,\ n\geq 1 & \mathcal{L}\{cos(kt)\}(s) &= \frac{s}{s^2+k^2} \\ \mathcal{L}\{e^{at}\}(s) &= \frac{1}{s-a} & \mathcal{L}\{senh(kt)\}(s) &= \frac{k}{s^2-k^2} \\ \mathcal{L}\{\delta_a(t)\}(s) &= e^{-as} & \mathcal{L}\{cosh(kt)\}(s) &= \frac{s}{s^2-k^2} \end{aligned}$$

2. Teoremas importantes.

Sea $a \in \mathbb{R}$ y $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ funciones continuas a trozos y de orden exponencial, es decir, que admiten Transformadas de Laplace denotadas por $F(s), G(s)$ respectivamente.

Teorema 1 (Primer teorema de traslación).

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a)$$

Teorema 2 (Segundo teorema de traslación).

$$\mathcal{L}\{f(t-a)H(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s)$$

con $H(t)$ función de Heaviside.

Teorema 3 (Derivadas de una transformada). *Para cada $n \in \mathbb{N}$ y $s > C + n$, se tiene que*

$$\frac{d^n}{ds^n}F(s) = (-1)^n \mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s)$$

Teorema 4 (Derivadas de una transformada). *si f satisface que $f,\ f', \ldots,\ f^n$ son continuas a trozos y de orden exponencial (con las mismas constantes), entonces se tiene*

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}(s) = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - sf^{n-2}(0) - f^{n-1}(0),\ s > C$$

Teorema 5.

$$\mathcal{L}\{(f * g)(t)\}(s) = F(s)G(s)$$

donde $(f * g)(t) = \displaystyle\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$

P1. Considere la función f, definida en $[0, 2)$

$$f(t) = \begin{cases} t & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

y para $t \geq 2 :\ f(t + 2) = f(t)$. Calcule su transformada de Laplace.

P2. Resuelva la siguiente EDO:

$$\begin{aligned} y'' + 4y' + 13y &= e^t \\ y(0) &= 1 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

P3. Considere la ecuación diferencial de Laguerre:

$$ty'' + (1 - t)y' + ny = 0$$

con n un entero no negativo y $y(0) = 1$. Denotamos $Y(s)$ la tranformada de Laplace de la solucion y.

(a) Demuestre que $Y(s)$ satisface la ecuación:

$$(s - s^2)Y' + (n + 1 - s)Y = 0.$$

(b) Demuestre que $Y(s) = \dfrac{C(s-1)^n}{s^{n+1}}$, donde C es una constante.

(c) Demuestre que

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})\right\}(s) = s^n \mathcal{L}(t^n e^{-t})(s)$$

(d) Determine $\mathcal{L}\left\{\dfrac{e^t}{n!}\dfrac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})\right\}(s)$

(e) Demuestre que $y(t) = C\left(\dfrac{e^t}{n!}\dfrac{d^n}{dt^n}(t^n e^{-t})\right)$, y a continuación encuentre C.