Transformada de Laplace

1. Introducción

Puede decirse que los métodos clásicos para la resolución de problemas de valores en la frontera en la Física Matemática se derivan del trabajo precursor de Fourier. Una nueva técnica, la de las transformadas integrales, cuyo origen se encuentra en los trabajos de Heaviside (electrotécnico inglés de fines del siglo pasado), ha sido desarrollada durante los últimos años, y tiene ciertas ventajas sobre el método clásico.

Heaviside (aproximadamente 1.890) se interesó originalmente en la resolución de E.D.O. con coeficientes constantes que aparecen en la teoría de circuitos eléctricos. Más tarde, él mismo extendió su método a las E.D.P. que aparecen en electromagnetismo y conducción de calor. Fue tal el poder de su método, que resolvió muchos problemas hasta entonces irresolubles y obtuvo soluciones a problemas ya resueltos en una forma más adaptable al Cálculo Numérico. Posteriores investigaciones efectuadas por Bronwich, Carson y Van der Pool, fundamentaron el cálculo de Heaviside sobre una base más sólida.

En un trabajo reciente, efectuado por Doetsch y otros, sobre la transformación de Laplace, se unifica la teoría desarrollada por Heaviside, Bronwich y Carson. General mente, el empleo de una transformada integral reducirá una E.D.P. en n variables independientes a una con $n-1$ variables, reduciendo por lo tanto, la dificultad del problema en estudio. En algunos casos, operaciones sucesivas de este tipo pueden reducir el problema a la resolución de una E.D.O. cuya teoría ha sido ampliamente desarrollada. De hecho, operaciones sucesivas podían reducir el problema a la resolución de una ecuación algebraica, pero sólo algunas veces merece la pena hacerlo.

Aún cuando la transformada de Laplace es de empleo más común y es particular (conveniente para problemas regidos por E.D.O. y para problemas sobre la conducción de calor), otras transformaciones integrales pueden ser de gran utilidad en la resolución de problemas de valores en la frontera en la Física Matemática. En la resolución de este tipo de problemas se han empleado con éxito diferentes transformaciones integrales y no existe razón alguna para que el método no pueda extenderse mediante el uso de otros núcleos.

1.1. Transformadas integrales

Una transformada integral es una aplicación $T : X \to Y$ entre espacios de funciones y es definida mediante

$$T[f(x)](s) = \int_A K(s,x) f(x) dx.$$

La función K se denomina *núcleo de la transformación* T y A viene hacer el rango de integración.

Como se ha indicado anteriormente, las transformadas integrales se utilizan ampliamente en las matemáticas puras y aplicadas, y son especialmente útiles en la resolución de ciertos problemas de contorno y de ciertos tipos de ecuaciones integrables. Algunas de las transformadas que son usadas y adaptadas para la resolución de diversos problemas son:

1. Transformada exponencial de Fourier:
$$\mathcal{F}[f(x)](s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-isx} f(x)dx.$$
2. Transformada seno de Fourier:
$$\mathcal{F}_s[f(x)](s) = \int_0^{+\infty} \operatorname{sen}(sx) f(x)dx.$$
3. Transformada coseno de Fourier:
$$\mathcal{F}_c[f(x)](s) = \int_0^{+\infty} \cos(sx) f(x)dx.$$
4. Transformada de Hankel:
$$\mathcal{H}[f(x)](s) = \int_0^{+\infty} xJ_n(sx) f(x)dx, \quad J_n \text{ función Bessel orden } n.$$
5. Transformada de Mellin:
$$\mathcal{M}[f(x)](s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1} f(x)dx.$$
6. Transformada de Laplace:
$$\mathcal{L}[f(x)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} f(x)dx.$$

Se trata de estudiar ahora la transformación de Laplace especialmente indicada para simplificar el proceso de resolver problemas de valor inicial, cuyas ecuaciones diferenciales sean lineales, y primordialmente cuando se incluyen funciones discontinuas. Es muy utilizada en teoría de circuitos.

Antes de entrar en sus aplicaciones, se va a comenzar introduciendo esta transformada de Laplace así como sus propiedades fundamentales y más útiles.

2. La transformada integral de Laplace

Definición 2.1 *Sea $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$. Se define la transformada de Laplace de $f(t)$ como la función $F(s)$ ó $\mathcal{L}[f(t)](s)$, definida por la integral*
$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt. \tag{2.1}$$
Note que la integral que aparece es una integral impropia, la cual está definida por
$$\int_0^{+\infty} e^{-st} f(t)dt = \lim_{b\to+\infty} \int_0^{b} e^{-st} f(t)dt.$$
El conjunto de valores de s para los cuales la integral impropia converge es llamado dominio de la transformada y se denota por $\operatorname{dom}(F)$.

Observación 2.1 *El parámetro s se considerará aquí real. Es esto suficiente para las aplicaciones con ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes y algunas de coeficientes variables. En otros casos es necesario trabajar en el campo complejo, considerando a s como complejo.*

Definición 2.2 *Se llama abscisa de convergencia de F al número real s_c definido por:*

$$s_c = \text{ínf}(dom(F)) = \text{ínf}(dom(\mathcal{L}(f))).$$

Propiedad (Linealidad):
El operador $\mathcal{L}$ es lineal, es decir, dados $f, g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ tales que $\mathcal{L}(f)$ y $\mathcal{L}(g)$ existen, se tiene que:

$$\mathcal{L}(f + \lambda g)(s) = \mathcal{L}(f)(s) + \lambda \mathcal{L}(g)(s), \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Veamos ahora algunas transformadas de funciones conocidas.

Ejemplo 2.1 Sea $f(t) = 1$, $\forall t \geq 0$. Calculemos su transformada de Laplace, usando su definición:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-st} dt = -\frac{1}{s} \lim_{b \to +\infty} (e^{-st})|_{t=0}^{t=b} \\ &= -\frac{1}{s} \lim_{b \to +\infty} (e^{-sb} - 1). \end{aligned}$$

Como deseamos la convergencia de la integral impropia, entonces debemos usar el hecho que $\lim_{b \to +\infty} e^{-sb} = 0$ si $s > 0$, caso contrario el límite no existe. Por lo tanto,

$$\boxed{\mathcal{L}(f)(s) = \frac{1}{s}, \quad s > 0.}$$

Es claro que $\text{dom}(\mathcal{L}(f)) = (0, +\infty)$ y $s_c = 0$.

Ejemplo 2.2 Sea $f(t) = e^{at}$, $\forall t \geq 0$ con $a \in \mathbb{C}$. Calculemos su transformada de Laplace, usando su definición:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f)(s) &= \int_0^{+\infty} e^{-st} e^{at} dt = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{(a-s)t} dt = \frac{1}{a-s} \lim_{b \to +\infty} (e^{(a-s)t})|_{t=0}^{t=b} \\ &= \frac{1}{a-s} \lim_{b \to +\infty} (e^{(a-s)b} - 1). \end{aligned}$$

Para ver a que es igual el límite en la igualdad anterior, consideremos un $z \in \mathbb{C}$ de la forma $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$. Luego,

$$\lim_{b \to +\infty} e^{zb} = \lim_{b \to +\infty} e^{xb} e^{iyb} = \lim_{b \to +\infty} e^{xb} (\cos(yb) + i\text{sen}(yb)).$$

Usando el hecho que las funciones seno y coseno son acotadas por arriba, vemos que el límite existe (y es 0) siempre que $\text{Re}(z) = x < 0$. Por tanto, teniendo en cuenta esto vemos que

$$\boxed{\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}, \quad s > \mathrm{Re}(a).}$$

Es claro que dom($\mathcal{L}(f)$) =(Re(a), $+\infty$) y s_c =Re(a).

Ejemplo 2.3 Tomemos $a = iw$ en el ejemplo anterior, entonces

$$\mathcal{L}[e^{iwt}] = \frac{1}{s-iw} = \frac{s+iw}{s^2+w^2} = \frac{s}{s^2+w^2} + i\frac{w}{s^2+w^2}, \text{ para } s > 0.$$

Por otro lado, debido a que $e^{iwt} = \cos(wt) + i\mathrm{sen}(wt)$ (Formula de Euler) y la linealidad de la Transformada de Laplace, se tiene que

$$\mathcal{L}[e^{iwt}] = \mathcal{L}[\cos(wt)](s) + i\mathcal{L}[\mathrm{sen}(wt)](s).$$

Por tanto, de ambas expresiones deducimos que:

$$\boxed{\mathcal{L}[\cos(wt)](s) = \frac{s}{s^2+w^2}, \quad \mathcal{L}[\mathrm{sen}(wt)](s) = \frac{w}{s^2+w^2}, \quad s > 0.}$$

Otra manera de deducir estas formulas es del siguiente modo. De la formula de Euler deducimos que

$$\cos(wt) = \frac{1}{2}(e^{iwt} + e^{-iwt}), \quad \mathrm{sen}(wt) = \frac{1}{2i}(e^{iwt} - e^{-iwt}).$$

Para el caso del coseno, vemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\cos(wt)](s) &= \frac{1}{2}(\mathcal{L}[e^{iwt}](s) + \mathcal{L}[e^{iwt}](s)) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-iw} + \frac{1}{s+iw}\right) \\ &= \frac{s}{s^2+w^2}. \end{aligned}$$

De forma análoga se deduce la Transformada de la función seno.

Ejercicio 2.1 Sean $f(t) = e^{\alpha t}\cos(wt)$ y $g(t) = e^{\alpha t}\mathrm{sen}(wt)$. Calcule su respectivas Transformadas de Laplace.