Problema (Desigualdad de Gronwall Generalizado)

Sean $\kappa : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ y $u, w : [0,T] \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Suponga que u satisface

$$u(t) \leq w(t) + \int_0^t \kappa(s)u(s)ds, \quad \forall t \in [0,T].$$

Demuestre que

$$u(t) \leq w(t) + \int_0^t \kappa(s)w(s)\exp\left(\int_s^t \kappa(z)dz\right)ds.$$

(**Sug.** Defina $r(t) = \int_0^t \kappa(s)u(s)ds$, que puede decir acerca de $r' - \kappa(t)r$?).

Demostración:

Sea $r(t) = \int_0^t \kappa(s)u(s)ds$, entonces por TFC se tiene que $r'(t) = \kappa(t)u(t)$. Luego

$$r'(t) - \kappa(t)r(t) = \kappa(t)[u(t) - r(t)].$$

Por hipótesis $u(t) \leq w(t) + r(t)$. Debido a que $\kappa(t) \geq 0$, podemos multiplicar a la desigualdad anterior por $\kappa(t)$, y así obtener:

$$\kappa(t)[u(t) - r(t)] \leq \kappa(t)w(t).$$

Luego,

$$r'(t) - \kappa(t)r(t) \leq \kappa(t)w(t).$$

Multiplicando por el factor integrante $e^{-\int_0^t \kappa(z)dz}$ se obtiene:

$$\frac{d}{dt}[e^{-\int_0^t \kappa(z)dz}r(t)] \leq e^{-\int_0^t \kappa(z)dz}\kappa(t)w(t).$$

Ahora, integrando de 0 hasta t:

$$e^{-\int_0^t \kappa(z)dz}r(t) \leq \int_0^t \kappa(s)w(s)e^{-\int_0^s \kappa(z)dz}ds.$$

De esta expresión se deduce que:

$$r(t) \leq \int_0^t \kappa(s)w(s)[e^{\int_0^t \kappa(z)dz}e^{-\int_0^s \kappa(z)dz}]ds,$$

el cual es equivalente a escribir:

$$r(t) \leq \int_0^t \kappa(s)w(s)e^{\int_s^t \kappa(z)dz}ds.$$

Por tanto, sustituyendo en la hipótesis:

$$u(t) \leq w(t) + \int_0^t \kappa(s)w(s)e^{\int_s^t \kappa(z)dz}ds.$$

Problema (Desigualdad de Gronwall)

Si $w(t) = W$, with $W \in \mathbb{R}_+$, muestre que la desigualdad anterior se reduce a:

$$u(t) \leq W\exp\left(\int_0^t \kappa(z)dz\right).$$

Demostración:

Sustituyendo el valor de la función $w(t) = W$ (constante) en la desigualdad anterior nos resulta:

$$u(t) \leq W + W\int_0^t \kappa(s)e^{\int_s^t \kappa(z)dz}ds.$$

Por otra parte, note que

$$\frac{d}{ds}e^{\int_s^t \kappa(z)dz} = \frac{d}{ds}e^{-\int_t^s \kappa(z)dz} = -\kappa(s)e^{-\int_t^s \kappa(z)dz} = -\kappa(s)e^{\int_s^t \kappa(z)dz}.$$

Usando esto en la desigualdad anterior se logra obtener que:

$$u(t) \leq W - W\int_0^t \frac{d}{ds}e^{\int_s^t \kappa(z)dz}ds = W - W[e^{\int_s^t \kappa(z)dz}]|_{s=0}^{s=t} = W - W[e^0 - e^{\int_0^t \kappa(z)dz}].$$

Luego,

$$u(t) \leq W \exp\left(\int_0^t \kappa(z)dz\right).$$