Problema. Una pesa de 16 libras queda suspendida de un resorte, alargándolo 6 pulgadas. La pesa es jalada otras 3 pulgadas abajo de esta posición de equilibrio y liberada. En este instante, se aplica al sistema una fuerza igual a $\frac{1}{8}\cos(6t)$. Calcule la función de desplazamiento si hay una fuerza de amortiguamiento de 8v libras, donde v es la velocidad de la pesa. .

Solución. Si denotamos por $x(t)$ la función que describe el movimiento, entonces se tiene del enunciado que debemos resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{array}{c} m\,x'' \;+\; 8\,x' \;+\; k\,x \;=\; \frac{1}{8}\cos(6t) \\ x(0) \;=\; \frac{1}{4} \quad x'(0) \;=\; 0\,. \end{array}$$

Por otro lado como $m\,g \;=\; 16$, tenemos

$$m \;=\; \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad k \;=\; 16\cdot 2 \;=\; 32\,.$$

Por lo tanto nuestro problema de valores iniciales es

$$\begin{array}{c} x'' \;+\; 16\,x' \;+\; 64\,x \;=\; \frac{1}{4}\cos(6t) \qquad (1) \\ x(0) \;=\; \frac{1}{4}\,, \quad x'(0) \;=\; 0\,. \end{array}$$

Como la ecuación característica de la ecuación homogénea es

$$p^2 \;+\; 16\,p \;+\; 64 \;=\; (p+8)^2 \;=\; 0\,,$$

la solución general de la ecuación homogénea es:

$$x_h(t) \;=\; e^{-8t}\,(c_1 \;+\; c_2\,t)\,.$$

Además como 6 no es solución de la ecuación característica, usando el método de los coeficientes indeterminados, buscamos solución particular de la ecuación (1) de la forma

$$x_p(t) \;=\; A\cos(6t) \;+\; B\,\mathrm{sen}(6t)\,.$$

Al reemplazar $x_p(t)$ en (1) obtenemos

$$(28\,A \;+\; 96\,B)\cos(6t) \;+\; (28\,B \;-\; 96\,A)\,\mathrm{sen}(6t) \;=\; \cos(6t)\,,$$

de donde se tiene

$$A \;=\; \frac{7}{10000} \quad B \;=\; \frac{24}{10000}\,.$$

Por lo tanto la solución general de la ecuacón (1) es

$$x(t) \;=\; \frac{1}{10000}\,(7\cos(6t) \;+\; 24\,\mathrm{sen}(6t)) \;+\; e^{-8t}\,(c_1 \;+\; c_2\,t)\,.$$

Imponiendo las condiciones iniciales $x(0) = \frac{1}{4}$ y $x'(0) = 0$, se obtiene

$$c_1 = \frac{2493}{10000} \qquad \text{y} \qquad c_2 = \frac{19800}{10000}.$$

y luego la solución de la ecuacón (1) es:

$$x(t) = \frac{1}{10000}\left[7\cos(6t) + 24\,\text{sen}(6t) + e^{-8t}\,(2493 + 19800\,t)\right].$$