Ejercicio: Considere para $0 < x < \frac{\pi}{2}$ la ecuación diferencial

$$y'' + \left(\frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} - \frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}\right) y' + \left(\frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}\right)^2 y = 0.$$

(a) Usando el cambio de variable $t = 4\ln(\text{sen}(x))$, transforme la ecuación en una ecuación con coeficientes constantes.

(b) Usando la parte a) encuentre su solución general.

(c) Encuentre la solución que verifica las siguientes condiciones iniciales $y(\frac{\pi}{4}) = y'(\frac{\pi}{4}) = 1$.

Solución:

(a) Notemos que el cambio de variable, introduce una función $x = x(t)$. Con este cambio, la variable independiente es t, y las derivadas en la ED deberían estar ahora con respecto a t. El cambio de variable $t = 4\ln(\text{sen}(x))$ implica que $\dfrac{dt}{dx} = 4\dfrac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$. Luego, por la regla de cadena

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = 4\frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}\frac{dy}{dt}, \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= -\frac{4}{\text{sen}^2(x)}\frac{dy}{dt} + 4\frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}\frac{d}{dx}\frac{dy}{dt} = -\frac{4}{\text{sen}^2(x)}\frac{dy}{dt} + 4\frac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dt}{dx} \\
&= -\frac{4}{\text{sen}^2(x)}\frac{dy}{dt} + 16\frac{\cos^2(x)}{\text{sen}^2(x)}\frac{d^2y}{dt^2}.
\end{aligned}$$

Reemplazando en la ecuación obtenemos

$$16\frac{\cos^2(x)}{\text{sen}^2(x)}\frac{d^2y}{dt^2} - 8\frac{\cos^2(x)}{\text{sen}^2(x)}\frac{dy}{dt} + \frac{\cos^2(x)}{\text{sen}^2(x)}y = 0.$$

Como $\cot(x) \neq 0$ en $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, la ecuación anterior es equivalente a la ecuación con coeficientes constantes:

$$16\frac{d^2y}{dt^2} - 8\frac{dy}{dt} + y = 0.$$

(b) La ecuación característica asociada a la ecuación diferencial es: $16\lambda^2 - 8\lambda + 1 = 0$, la cual tiene como raíces a: $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{4}$. Por tanto, la solución general de esta ecuación es:

$$y(t) = (c_1 + tc_2)e^{\frac{t}{4}}.$$

Regresando a la variable original obtenemos:

$$y(x) = (c_1 + c_2\ln(\text{sen}(x)))\text{sen}(x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}, \; c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(c) De la 1ra condición inicial tenemos: $1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(c_1 + c_2\ln(\frac{\sqrt{2}}{2}))$. Para usar la otra condición inicial, derivemos la función y:

$$y'(x) = \cos(x)(c_1 + c_2 + c_2\ln(\text{sen}(x))).$$

Luego $1 = y'(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}(c_1 + c_2 + c_2\ln(\frac{\sqrt{2}}{2}))$. De ambas ecuaciones obtenemos $c_2 = 0$ y $c_1 = \frac{2}{\sqrt{2}}$. Así, la solución que satisface tales condiciones es:

$$y(x) = \frac{2}{\sqrt{2}}\text{sen}(x), \quad 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$