Pauta Control 1, MA2601 EDO (30/03/11)

Prof. Julio López, **Aux.** Sebastián Reyes Riffo, Francisco Bravo.

P1. (a) Considere las rectas $L_1 : ax + by + e = 0$ y $L_2 : cx + dy + f = 0$. Como $ad - bc \neq 0$, entonces las rectas L_1 y L_2 se intersectan en un único punto, digamos (α, β). Por el cambio de variable sugerido y el hecho que el punto (α, β) esta en L_1 y L_2, vemos que:

$$ax + by + e = a(t + \beta) + b(z + \alpha) + e = at + bz + (a\beta + b\alpha + e) = at + bz,$$

y

$$cx + dy + f = c(t + \beta) + d(z + \alpha) + f = ct + dz + (c\beta + d\alpha + f) = ct + dz.$$

Luego, la ecuación diferencial se escribe como:

$$z' = y' = f\left(\frac{ax + by + e}{cx + dy + f}\right) = f\left(\frac{at + bz}{ct + dz}\right) = f\left(\frac{a + b\frac{z}{t}}{c + d\frac{z}{t}}\right).$$

Esta ecuación es homogénea. (Hasta aquí tienen todo el puntaje en esta pregunta). Para solucionar esta ecuación, hacemos $u = \frac{z}{t}$, entonces $z = tu$, de donde $z' = u + tu'$ (Note que $z = z(t)$ y $u = u(t)$). Sustituyendo esto en la ecuación diferencial nos da:

$$u + tu' = f\left(\frac{a + bu}{c + du}\right),$$

la cual es equivalente a:

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{t}\underbrace{\left(f\left(\frac{a + bu}{c + du}\right) - u\right)}_{g(u)},$$

la cual es a variables separables.

(b) En este caso el punto de intersección de las rectas es: $\alpha = -2$ y $\beta = -1$, por lo que el cambio de variables es:

$$t = x - \alpha = x + 2, \quad z = y - \beta = y + 1,$$

de donde $\frac{dz}{dt} = \frac{dy}{dx}$. Así, la ecuación diferencial queda:

$$\frac{dz}{dt} = \frac{z}{t} - \exp(\frac{z}{t}).$$

Sea $u = \frac{z}{t}$, entonces $\frac{dz}{dt} = u + t\frac{du}{dt}$. Con esto, la ecuación diferencial se reduce a:

$$t\frac{du}{dt} = -\exp(u),$$

que es de variables separables. De esta expresión tenemos:

$$-\int e^{-u}du = \int \frac{1}{t}dt + C, \quad C \in \mathbb{R},$$

de donde

$$e^{-u} = \ln(|t|) + C = \ln(c|t|), \quad C = \ln(c) \text{ con } c > 0.$$

Regresando a la variable original:

$$e^{-\frac{y+1}{x+2}} = \ln(c|x + 2|).$$

(c) Debido a que $e^r > 0$, para todo $r \in \mathbb{R}$, entonces si $\ln(c|x+2|) > 0$:

$$-\frac{y+1}{x+2} = \ln(\ln(c|x+2|)) \quad \Rightarrow \quad y(x) = -1 - (x+2)\ln(\ln(c|x+2|)).$$

Observar que $\ln(c|x+2|) > 0$ sii $c|x+2| > 1$.

(d) La idea es determinar la constante c tal que: $\lim_{x\to 0^+} y(x) = +\infty$.
De la parte anterior se deduce que esto se cumple si: $\lim_{x\to 0^+}(x+2)\ln(\ln(c|x+2|)) = -\infty$. Esto mismo se da si $\lim_{x\to 0^+}\ln(\ln(c|x+2|)) = -\infty$, pues $\lim_{x\to 0^+}(x+2) = 2$. Por continuidad de ln, de la última expresión se deduce que: $\lim_{x\to 0^+}\ln(c|x+2|) = 0$. Para que esto suceda, $c = \frac{1}{2}$. Por tanto

$$y_p(x) = -1 - (x+2)\ln(\ln(\frac{1}{2}|x+2|)).$$

P2.- (a) (i) Para encontrar las constantes a y b, reemplazaremos la solución $y_p(x) = a(1+x)^b$ en la ecuación diferencial. Esto es:

$$ab(1+x)^{b-1} + a(1+x)^b - \frac{3}{2}\frac{a^2(1+x)^{2b}}{(1+x)^4} = 2(1+x)^3.$$

Esta ecuación es equivalente a:

$$2ab(1+x)^{b+3} + 2a(1+x)^{b+4} - 3a^2(1+x)^{2b} = 4(1+x)^7.$$

Para que esta igualdad sea cierta, debemos de tener que:

$$b+3 = 7, \quad b+4 = 2b, \quad 2a = 3a^2, \quad 2ab = 4$$

ó

$$b+3 = 2b, \quad b+4 = 7, \quad 2a = 4, \quad 2ab = 3a^2.$$

En el 1er caso obtenemos: $b = 4$ y a debe verificar $2 = 3a$ y $2a = 1$, lo cual no tiene solución. Ahora, en el 2do caso obtenemos $b = 3$ y $a = 2$. Por tanto, la solución particular es

$$y_p(x) = 2(1+x)^3.$$

(1 pto.)

(ii) Para encontrar la solución general hacemos el cambio de variables:

$$y(x) = 2(1+x)^3 + \frac{1}{z}.$$

Reemplazando en la ecuación, ordenando y multiplicando por z^2 nos queda la ecuación lineal

$$z' - \left(1 - \frac{6}{1+x}\right)z = -\frac{3}{2}\frac{1}{(1+x)^4}.$$

<u>Obs:</u> Si $y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x)$ representa la ecuación de Riccati, entonces mediante el cambio de variable $y = y_p + \frac{1}{z}$ la ecuación diferencial se reduce a:

$$z' - (p(x) + 2q(x)y_p)z = q(x).$$

Puede directamente haber usado esta fórmula, la cual fue deducida en clase.

Como esta ecuación es lineal de 1er orden, entonces buscamos el factor integrante:

$$\mu(x) = \exp(\int p(x)dx) = \exp(-\int \left(1 - \frac{6}{1+x}\right) dz) = e^{-x}(1+x)^6.$$

Luego, al multiplicar este factor integrante a la ED nos da:

$$\underbrace{e^{-x}(1+x)^6\left(z' - \left(1 - \frac{6}{1+x}\right) z\right)}_{\frac{d}{dx}(e^{-x}(1+x)^6 z)} = -\frac{3}{2}e^{-x}(1+x)^2.$$

Esta ecuación se escribe como:

$$\frac{d}{dx}(e^{-x}(1+x)^6 z) = -\frac{3}{2}e^{-x}(1+x)^2.$$

Integrando

$$e^{-x}(1+x)^6 z = \frac{3}{2}[(1+x)^2 + 2(1+x) + 2]e^{-x} + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Por tanto,

$$z = \frac{3}{2}\frac{1}{(1+x)^6}[(1+x)^2 + 2(1+x) + 2] + c\frac{e^x}{(1+x)^6}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Luego la solución general en forma implícita de nuestra ecuación de Riccati es

$$y(x) = 2(1+x)^3 + \frac{2(1+x)^6}{3[(1+x)^2 + 2(1+x) + 2] + 2ce^x}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(2 pto.)

(b) Considere la transformación $u(x) = \exp(\int h(x)y(x)dx)$. Entonces al derivar nos da:

$$u'(x) = h(x)y(x)\exp(\int h(x)y(x)dx) = h(x)y(x)u(x) \quad (0.1)$$

$$u''(x) = h'(x)y(x)u(x) + h(x)y'(x)u(x) + h(x)y(x)u'(x). \quad (0.2)$$

(1 pto.)

Ahora, multipliquemos a la ecuación de Ricatti por la expresión $h(x)u(x)$:

$$y'(x)h(x)u(x) + g(x)y(x)h(x)u(x) + h^2(x)y^2(x)u(x) = k(x)h(x)u(x).$$

De (0.1), despejando de (0.2) y reemplazando en la anterior igualdad nos da:

$$u''(x) - h'(x)y(x)u(x) - h(x)y(x)u'(x) + u'(x)g(x) + h^2(x)y^2(x)u(x) = k(x)h(x)u(x).$$

De (0.1) obtenemos: $y(x)u(x) = \frac{u'(x)}{h(x)}$ y también: $h(x)y(x)u'(x) = h^2(x)y^2(x)u(x)$. Por lo que la anterior expresión se reduce a:

$$u''(x) - h'(x)\frac{u'(x)}{h(x)} + u'(x)g(x) = k(x)h(x)u(x),$$

el cual es equivalente a:

$$u''(x) + u'(x)\left(g(x) - \frac{h'(x)}{h(x)}\right) - k(x)h(x)u(x) = 0.$$

(2 pto.)

P3.- (a) Considere la ecuación diferencial:

$$e^y \text{sen}(2x)dx + \cos(x)(e^{2y} - y)dy = 0.$$

Esta ecuación se escribe de manera equivalente como:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\text{sen}(2x)e^y}{\cos(x)(e^{2y} - y)}.$$

Pero $\text{sen}(2x) = 2\text{sen}(x)\cos(x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = -2\,\text{sen}(x)\frac{e^y}{e^{2y} - y}.$$

Esta ecuación diferencial es a variables separables, por lo que lo escribimos como:

$$\frac{e^{2y} - y}{e^y}dy = -2\,\text{sen}(x)dx.$$

Note que $e^y \neq 0$, por lo que no tiene soluciones constantes.
Integrando la EDO, nos da:

$$\int \frac{e^{2y} - y}{e^y}dy = 2\cos(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Observar que:

$$\int \frac{e^{2y} - y}{e^y}dy = \int (e^y - ye^{-y})dy = e^y + (y+1)e^{-y}.$$

Por tanto,

$$e^y + (y+1)e^{-y} = 2\cos(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

(b) Recordemos la Ley de Torricelli:

> La velocidad de salida del agua a través de un orificio en el fondo de un tanque lleno hasta una altura, es igual a la velocidad de un objeto que cae libremente desde la misma altura.

Denotemos por $v(t)$ la velocidad de salida del agua en el instante t, $h(t)$ la altura del tanque en el instante t y g la aceleración de la gravedad ($9{,}8 m/s^2$). Entonces, según la Ley de Torricelli tenemos:

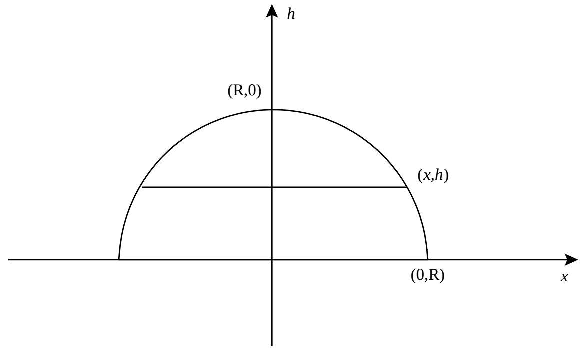
$$v(t) = \sqrt{2gh(t)}.$$

Sea A_0 y A_T las areas transversales del orificio y del tanque respectivamente. Por tanto, la disminución del nivel del agua $h(t)$ con el flujo de salida viene dado por (deducción hecha en clase):

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{A_0}{A_T}v(t) = -\frac{A_0}{A_T}\sqrt{2gh(t)}.$$

Con los datos expuestos, tenemos el valor de $A_0 = 5\text{cm}^2$. Ahora, veamos el area de la sección transversal del tanque.

1ra Forma:



De la figura tenemos que $A_T = \pi x^2$, donde x denota el radio del circulo a altura h. En el circulo vemos que se tiene la siguiente relación:

$$x^2 + h^2 = R^2,$$

de donde $x^2 = R^2 - h^2$. Con esto, $A_T = \pi(R^2 - h^2)$. Por tanto, reemplazando los valores de A_0 y A_T:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{5}{\pi(R^2 - h^2)}\sqrt{2gh(t)} = -\frac{5\sqrt{2g}}{\pi}\frac{\sqrt{h}}{R^2 - h^2}.$$

Esta ED es a variables separables, por lo que:

$$\int \frac{R^2 - h^2}{\sqrt{h}}dh = -\int \frac{5\sqrt{2g}}{\pi}dt,$$

integrando nos da

$$2R^2\sqrt{h} - \frac{2}{5}h^{5/2} = -\frac{5\sqrt{2g}}{\pi}t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- Por hipótesis, $h(0) = R$ (por ser semiesferico). Entonces al reemplazar en la anterior expresión nos da:

  $$c = 2R^2\sqrt{R} - \frac{2}{5}R^{5/2} = 2R^{5/2} - \frac{2}{5}R^{5/2} = \frac{8}{5}R^{5/2}.$$

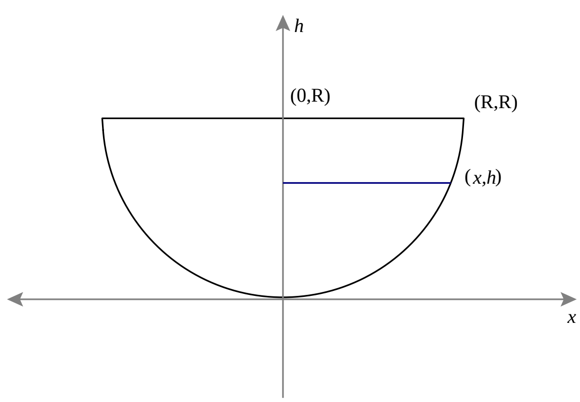
  Por tanto, el modelo del vaciado de este tanque es:

  $$2R^2\sqrt{h} - \frac{2}{5}h^{5/2} = -\frac{5\sqrt{2g}}{\pi}t + \frac{8}{5}R^{5/2}.$$

Para que el tanque quede vacío, se debe de cumplir que $h(t) = 0$:

$$\frac{5\sqrt{2g}}{\pi}t = \frac{8}{5}R^{5/2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{4\sqrt{2}}{25}\frac{\pi}{\sqrt{g}}R^{5/2}.$$

2da Forma:



De la figura tenemos que $A_T = \pi x^2$, donde x denota el radio del circulo a altura h. En el circulo vemos que se tiene la siguiente relación:

$$x^2 + (h - R)^2 = R^2,$$

de donde $x^2 = R^2 - (h - R)^2 = -h^2 + 2hR$. Con esto, $A_T = \pi(2hR - h^2)$. Por tanto, reemplazando los valores de A_0 y A_T:

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{5}{\pi(2hR - h^2)}\sqrt{2gh(t)} = -\frac{5\sqrt{2g}}{\pi}\frac{\sqrt{h}}{2hR - h^2}.$$

Esta ED es a variables separables, por lo que:

$$\int \frac{2hR - h^2}{\sqrt{h}}dh = -\int \frac{5\sqrt{2g}}{\pi}dt,$$

integrando nos da

$$\frac{4}{3}Rh^{3/2} - \frac{2}{5}h^{5/2} = -\frac{5\sqrt{2g}}{\pi}t + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

- Por hipótesis, $h(0) = R$ (por ser semiesférico). Entonces al reemplazar en la anterior expresión nos da:

  $$c = \frac{4}{3}RR^{3/2} - \frac{2}{5}R^{5/2} = \frac{4}{3}R^{5/2} - \frac{2}{5}R^{5/2} = \frac{14}{5}R^{5/2}.$$

  Por tanto, el modelo del vaciado de este tanque es:

  $$\frac{4}{3}Rh^{3/2} - \frac{2}{5}h^{5/2} = -\frac{5\sqrt{2g}}{\pi}t + \frac{14}{5}R^{5/2}.$$

Para que el tanque quede vacío, se debe de cumplir que $h(t) = 0$:

$$\frac{5\sqrt{2g}}{\pi}t = \frac{14}{5}R^{5/2} \quad \Rightarrow \quad t = \frac{7\sqrt{2}}{25}\frac{\pi}{\sqrt{g}}R^{5/2}.$$

(4 pto.)