UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MATEMÁTICA
MA2601 - ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Guía de Ejercicios

1. Al sacar un pastel del horno, su temperatura es 300^0F. Después de 3 minutos 200^0F. ¿En cuanto tiempo se enfriará hasta la temperatura ambiente de 70^0F?.

2. Un termómetro se saca de un recinto donde la temperatura del aire es 70^0F y se lleva al exterior, donde la temperatura es 10^0F. Pasado $\frac{1}{2}$ minuto el termómetro indica 50^0F. ¿Cual es la lectura cuando $t = 1$min? ¿Cuánto tiempo se necesita para que el termómetro llegue a 15^0F?.

3. Suponer que se tiene un tanque semiesférico de radio R que inicialmente esta lleno de agua y que en el fondo tiene una salida cuya sección transversal tiene un área de 5 cm^2. La salida se abre en cierto instante. Encontrar el tiempo que transcurre para vaciar el tanque (a) para cualquier R dado, (b) para $R = 1$ metro. (**Sug.** Usar la fórmula dada en clase, donde A_T es el área de la sección transversal del tanque en la altura $h(t)$, por lo que ahora A_T depende de h).

4. La policía descubre el cuerpo de un profesor de la Universidad de Chile. Para resolver el crimen es decisivo determinar cuando se cometió el crimen. La forense llega al medio día y de inmediato observa que la temperatura del cuerpo es de 30 grados Celsius. Espera una hora y observa que la temperatura del cuerpo ha disminuido a 29 grados Celsius. Asimismo, observa que la temperatura de la habitación es constante a 27 grados Celsius. Suponiendo que la temperatura de la víctima era normal en el momento de su fallecimiento (37 grados Celsius). Determine la hora en que se cometió el crimen.

5. Queremos inyectar un medicamento en un órgano humano. Supongamos que el volumen de circulación sanguínea del órgano es 150 cm^3 y que se inyectan 1 cm^3/min de agua destilada con 0.3 mgr/cm^3 de concentración de medicamento. La sangre entra al órgano a la misma razón que sale. Si en el instante inicial no hay presencia del medicamento. ¿En que momento la concentración del medicamento en el órgano será de 0.005 mgr/cm^3?.

6. Considere un estanque que está lleno con 1000 lts. de agua. Por un tubo conectado al estanque se hace ingresar una solución contaminada en la proporción de 1 a 100, con una tasa de 300 lts./min. Por un tubo fluye agua hacia el tanque con una tasa de 300 lts./min. Una bomba extrae líquido del estanque con una velocidad de 700 lts./min.

   (a) Si $C(t)$ representa la cantidad de contaminante en el estanque en el instante t, medida en litros, deduzca el problema con valores iniciales que modela su evolución.

   (b) Encuentre la solución al problema planteado. Indique en qué instante se alcanza la máxima cantidad de contaminante en el estanque.

7. Cuando se tiene en cuenta lo olvidadizo de un individuo, la rapidez con que memoriza está definida por
$$\frac{dA}{dt} = k_1(M - A) - k_2 A,$$

donde $k_1, k_2 > 0$, $A(t)$ es la cantidad de material memorizado en el tiempo t, M es la cantidad total por memorizar y $M - A$ es la cantidad que resta por memorizar. Halle $A(t)$ y grafique la solución. Suponga que $A(0) = 0$. Determine el valor límite de A cuando $t \to \infty$.

8. Un isótopo radiactivo se desintegra a una tasa que es proporcional a la masa del isótopo presente.

   (a) Si $x(t)$ representa la masa del isótopo al instante t, pruebe que $x(t) = x(0)e^{-kt}$, para alguna constante $k > 0$ (llamada constante de desintegración).

   (b) El tiempo T en el que la masa del isótopo se reduce a la mitad se denomina *vida media* del isótopo. Sabiendo que la vida media del carbono 14 radiactivo es de 5600 años, determine la masa restante de carbono 14 al cabo de t años, considerando que inicialmente la masa de la muestraera x_0.

9. Una liebre parte del origen y corre por el eje y positivo con velocidad a. Al mismo tiempo, un perro que corre con velocidad b sale del punto $(c, 0)$ y persigue a la liebre. El propósito de este problema es determinar la trayectoria $y(x)$ que sigue el perro.
   Notar que la variable independiente que interesa tener en la ecuación diferencial de la curva es x; el tiempo t es aquí una variable que se utilizará en forma auxiliar en el planteamiento, pero que se buscará eliminar en la expresión final.

   (a) Dado un instante t cualquiera, el conejo se encontrará en la posición $C = (0, at)$ del plano xy y llamamos $P = (x, y)$ a las coordenadas de la posición del perro. Observando que el trazo PC es tangente a la trayectoria buscada, obtenga la ecuación diferencial que satisface $y(x)$.

   (b) Derivando la expresión anterior con respecto a x pruebe que se tiene

   $$x\frac{d^2y}{dx^2} = -a\frac{dt}{dx}.$$

   (c) Para calcular dt/dx en la ecuación anterior comience por obtener el valor de la derivada ds/dx de la longitud s del arco de curva descrito por $y(x)$. Para este efecto, recuerde que

   $$ds^2 = dx^2 + dy^2,$$

   y que s crece si x decrece en nuestro caso.

   (d) Continuando con el cálculo de dt/dx, observe que ds/dt representa la velocidad del perro que es constante y conocida según los datos del problema. Usando este hecho y el valor de ds/dx, calcule dt/dx.

   (e) Demuestre entonces que la ecuación buscada de la curva es

   $$x\frac{d^2y}{dx^2} = k\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2},$$

   donde $k = a/b$.

   (f) Mediante la sustitución $p = \frac{dy}{dx}$, obtendrá una ecuación de primer orden en la variable p. Resuelva dicha ecuación. Concluya usando p para determinar y.