Ejercicio: Considere la ecuación diferencial:

$$(xy^2 - x)dx + (x^2y + y)dy = 0.$$

1. Encuentre la solución general.
2. Encuentre la solución particular que verifica $y(\sqrt{3}) = -\frac{1}{2}$.
3. Encuentre el intervalo máximo donde la solución particular anterior está definida.

Solución: (a) La ecuación diferencial se puede escribir como:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{x^2+1}\frac{1-y^2}{y}.$$

Las soluciones constantes son:

$$y_1(x) = -1, \quad y_2(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Asumiendo que $y \neq \pm 1$, separamos variables:

$$\frac{y}{1-y^2}dy = \frac{x}{x^2+1}dx,$$

integrando ambos lados

$$-\frac{1}{2}\ln(|1-y^2|) = \frac{1}{2}\ln(|x^2+1|) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Haciendo $c = \ln(c_1)$, obtenemos:

$$\frac{1}{\sqrt{1-y^2}} = c_1\sqrt{x^2+1},$$

o lo que es lo mismo

$$1 - y^2 = \frac{c_2}{x^2+1}, \quad c_2 \in \mathbb{R}.$$

Por tanto, la solución general en forma explícita es:

$$y = \pm\sqrt{1 - \frac{c_2}{x^2+1}}.$$

(b) Ahora, encontremos una solución particular:

$$-\frac{1}{2} = y(\sqrt{3}) = -\sqrt{1 - \frac{c_2}{3+1}} \quad \Rightarrow \quad c_2 = 3.$$

Por tanto,

$$y = -\sqrt{1 - \frac{3}{x^2+1}}.$$

(c) Finalmente para responder c) observamos que la solución particular está definida para los x tales que

$$1 - \frac{3}{x^2+1} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2-2}{x^2+1} \geq 0,$$

de donde $x^2 - 2 \geq 0$, pues $x^2 + 1 \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Luego, la solución particular está definida en el conjunto $x \in (-\infty, -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}, \infty)$. Por tanto, el intervalo máximo donde la solución particular está definida es $x \in [\sqrt{2}, \infty)$ (pues la c.i es en $x_0 = \sqrt{3}$).