Guía de Ejercicios

1. Verifique que la siguientes ecuaciones son homogéneas y resuélvalas:
   (1) $4x^2 + xy - 3y^2 + y'(-5x^2 + 2xy + y^2) = 0$.
   (2) $y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$.
   (3) $x^3 \frac{dy}{dx} = x^2 y - y^3$.
   (4) $x\frac{dy}{dx} = x\cos(y/x) + y$.
   (5) $xy' - y = \frac{y}{\ln(y) - \ln(x)}$.
   (6) $ydx + (2\sqrt{xy} - x)dy = 0$.
   (7) $(x - y\cos(y/x))dx + x\cos(y/x)dy = 0$.

2. En las siguientes ecuaciones encuentre una expresión que contenga la solución general de la ecuación diferencial que se reduce a homogénea:
   (1) $y' = \frac{3x+y-1}{6x+2y-3}$.
   (2) $y' = \frac{2x-5y-9}{-4x+y+9}$.
   (3) $y' = \left(\frac{x-y+1}{x-y}\right)^2$.

3. Haciendo un cambio de variable adecuado, resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:
   (1) $(y^4 - 3x^2)dy + xydx = 0$.
   (2) $2x^4 yy' + y^4 = 4x^6$.
   (3) $2(x^2 y + \sqrt{1 + x^4 y^2})dx + x^3 dy = 0$.
   (4) $y\cos(x)dx + (2y - \operatorname{sen}(x))dy = 0$, (**sug.** hacer $u = \operatorname{sen}(x)$).
   (5) $(x + y^3)dx + (3y^5 - 3y^2 x)dy = 0$, (**sug.** hacer $x = z^\alpha$).

4. La ecuación
$$(2x^3 y - 2y^3)dy = (3x^5 + 3x^2 y^2)dx$$
   se reduce a una ecuación homogénea haciendo un cambio de variables de la forma $x = u^p$ e $y = v^q$, con p, q constantes adecuadas. Encuentre dichas constantes y resuelva tal ecuación.

5. (a) Muestre que la ecuación diferencial
$$y' = \frac{y}{x} + x^m y^n f\left(\frac{y}{x}\right)$$
   se transforma en una ecuación de variables separables usando el cambio de variable $y = vx$.

   (b) Use a) para encontrar la solución de
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{\sec^2(y/x)}{y^2}.$$

6. Sea ψ una función diferenciable tal que
$$\psi'(x) + 5\psi(x) \leq x, \quad \psi(0) = -\frac{1}{25}.$$
   Demuestre que
$$\psi(x) \leq \frac{x}{5} - \frac{1}{25}, \quad x \geq 0.$$
   (**Sug.** Use la función $\mu(x) = e^{5x}$ como factor integrante de la desigualdad).

7. Resuelva las siguientes ecuaciones lineales del primer orden:

   (1) $xy' + y = xe^x$.

   (2) $y' + y\cos(x) = \text{sen}(x)\cos(x)$.

   (3) $y' - \cos(x)y = xe^{x^2+\text{sen}(x)}$.

   (4) $(x+2)^2y' = 5 - 8y - 4xy$.

   (5) $x\ln(x)y' - y = x^3(3\ln(x) - 1)$

   (6) $y' = \frac{1}{x\text{sen}(y)+2\text{sen}(2y)}$. (**Sug.** Cambio variable y luego considerar la variable independiente como dependiente y viceversa).

8. Resuelva las siguientes ecuaciones de Bernoulli:

   (1) $xy^2y' + y^3 = x\cos(x)$.

   (2) $x^2y' - 2xy = 3y^4$.

   (3) $y' + \frac{3}{x}y = -2\,xy^{5/2}$.

   (4) $x^3y' + x^2y = 2y^{-4/3}$.

   (5) $y' = \frac{3x^2}{x^3+y+1}$. (**Sug.** Considerar la variable independiente como dependiente y viceversa).

   (6) $(1+x^2)y' = xy + x^2y^2$.

9. Solucione la siguientes ecuaciones de Riccati:

   (1) $y' = (1-x)y^2 + (2x-1)y - x, \quad y_p(x) = ax + b$ con a, b por determinar.

   (2) $y' = -8xy^2 + 4x(4x+1)y - (8x^3 + 4x^2 - 1), \quad y_p(x) = ax + b$ con a, b por determinar.

   (3) $2\cos(x)y' = 2\cos^2(x) - \text{sen}^2(x)y^2, \quad y_p(x) = \text{sen}(x)$.

   (4) $y' = -e^{-x}y^2 + y + e^x, \quad y_p(x) = ae^{kx}$ con a, k por determinar.

   (5) $y' = \frac{1}{16x^2}y^2 - y + 4x(x+4), \quad y_p(x) = ax^b$ con a, b por determinar.

10. Para $x > 0$ considere la ecuación de Riccati:

$$y' + e^{-2x}y^2 - \frac{1}{x}(1 + 4x + 2x^2)y = -\frac{e^{2x}}{x}(1 + x + 2x^2 + x^3).$$

   (a) Encuentre la solución particular de la forma $y_p(x) = e^{2x}(ax + b)$.

   (b) Encuentre su solución general.

11. Consideremos la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con condiciones iniciales

$$(E) \qquad \begin{cases} y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y &= 0, \ x \in I \\ y(0) = y_0, \ y'(0 = y_1) \end{cases}$$

donde $y_0 > 0$, $y_1 \in \mathbb{R}$ e $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo.

   (a) Pruebe que el cambio de variable $v = y'/y$ reduce (E) a la ecuación de Riccati

$$\frac{dv}{dx} + v^2 + a_1(x)v + a_0(x) = 0.$$

   (b) Encuentre la ecuación de Riccati asociada a $y'' - y' - 2y = 0$, y luego resuélvala considerando $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.