Guía de Ejercicios

1. Verificar que las funciones dadas son soluciones de las ecuaciones diferenciales indicadas:
(1) $y = \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x}$; $\quad xy' + y = \cos(x)$.
(2) $y = e^x - e^{-x} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(x)$; $\quad y'' - y = \operatorname{sen}(x)$.
(3) $y = \operatorname{arcsen}(xy)$; $\quad y'(\sqrt{1 - x^2y^2} - x) = y$.
(4) $y = e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{t^2} dt + c_1 e^{-x^2}$; $\quad y' + 2xy = 1$.
(5) $x = y \displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(t^2) dt$; $\quad y = xy' + y^2 \operatorname{sen}(x^2)$.
(6) $\left.\begin{array}{l} x = te^t \\ y = e^{-t} \end{array}\right\}$; $\quad (1 + xy)y' + y^2 = 0$.
(7) $\left.\begin{array}{l} x = t\ln(t) \\ y = t^2(2\ln(t) + 1) \end{array}\right\}$; $\quad y' \ln(y'/4) = 4x$.
(8) $x^3 - 4x^2y + 2xy^2 - y^3 = 0$; $\quad (3x^2 - 8xy + 2y^2)dx - (4x^2 - 4xy + 3y^2)dy = 0$
(9) $y^3 = \dfrac{1}{x} + \dfrac{c}{x^3}$; $\quad xy^2dy + y^3dx = \dfrac{dx}{x}$.
(10) $\arctan(y/x) - \ln(c\sqrt{x^2 + y^2}) = 0$; $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + y}{x - y}$.

2. Si $y' = y^2 - 1$, verificar que
   (a) $y = \dfrac{1 + ce^{2x}}{1 - ce^{2x}}$ es solución general.
   (b) Explicar porque $y = -1$ es solución singular.

3. Dada una curva $y = y(x)$, sea $L_T(x)$ la longitud de la recta tangente entre el punto $P = (x, y(x))$ y su punto de intersección T con el eje OX.
   (a) Demuestre que
   $$L_T(x) = \frac{y(x)}{y'(x)}\sqrt{1 + y'(x)^2}.$$
   (b) Si a es una constante no nula, encuentre la ecuación diferencial de la familia de curvas que verifican
   $$L_T(x) = a(y(x))^2.$$
   (c) Demuestre que la familia de trayectorias ortogonales a la familia de curvas del item b) está dada por
   $$y(x) = \frac{1}{a}\cosh(ax + b),\ b \in \mathbb{R}.$$

4. Para las siguientes familias de curvas, haga lo siguiente:
   (a) Escriba la ecuación diferencial que describe la familia.
   (b) Haga lo mismo para la familia ortogonal.
   (c) Con un poco de ingenio, descubra la ecuación de la familia ortogonal.
   (d) Grafique ambas familias.

(1) Familia de círculos tangentes al eje OY en el origen $x^2 + y^2 = 2cx$, $c \in \mathbb{R}$.
(2) Las rectas que pasan por el punto (1,2).
(3) Las curvas tales que la normal al gráfico por el punto $(x, y(x))$ corta al eje OX en el punto $(2x, 0)$.

5. Se desea graficar la función $y(x) = y = e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt$, para $x \geq 0$.

   (a) Observe que la pendiente de cualquier solución de la ecuación diferencial es constante a lo largo de ciertas hipérbolas. (ver 1.(3))

   (b) Derive la ecuación diferencial ordinaria para determinar las regiones del plano donde las curvas integrales son convexas y cóncavas, respectivamente.

   (c) Grafique las curvas integrales de la EDO, destacando y.

   (d) Conjeture el valor de $\lim\limits_{x\to\infty} y(x)$.

6. Resuelva las siguientes ecuaciones con integración directa:
(1) $(1 + x^2)y' = \arctan(x)$.
(2) $y' = x\,\mathrm{sen}(x)$.
(3) $y' = (x + 1)^2$.
(4) $(x + 1)\frac{dy}{dx} = x + 6$.
(5) $e^x \frac{dy}{dx} = 2x$.

7. Resuelva las siguientes ecuaciones mediante separación de variables:
(1) $yy' - x = xy^2$.
(2) $y' = 1 + x + y + xy$.
(3) $x^3 e^{2x^2+2y^2}dx - y^3 e^{-x^2-2y^2}dy = 0$.
(4) $(4y + yx^2)dy - (2x + xy^2)dx = 0$.
(5) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy + 3x - y - 3}{xy - 2x + 4y - 8}$.
(6) $x\sqrt{1 + y^2} + yy'\sqrt{1 + x^2} = 0$.
(7) $xydx + (x^2 + 1)e^{y^2}dy = 0$.
(8) $(1 + x^2 + y^2 + x^2y^2)dy = y^2dx$.
(9) $\dfrac{x}{y}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2y^2 + 1}{x + 1}$.
(10) $e^y\mathrm{sen}(2x)dx + \cos(x)(e^{2y} - y)dy = 0$.

8. Responda a los siguientes planteamientos:

   (a) Sea I un intervalo y suponga que $f : I \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable tal que si $f(x) > 0$ entonces $f'(x) < 0$. Pruebe que si $f(x_0) \leq 0$ para algún $x_0 \in I$, entonces $f(x) \leq 0$ para todo $x \in I$ tal que $x > x_0$.

   (b) Suponga que $y : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función diferenciable que satisface la ecuación diferencial $y'(x) = y(x)^2 - x$ y que $y(x_0)^2 < x_0$ para algún x_0. Pruebe que $y(x)^2 < x$, $\forall x \geq x_0$. (**Sug.** Adaptar el resultado del punto anterior).