Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

(Transformada de Laplace)

Julio López
jclopez@dim.uchile.cl

Depto Ingeniería Matemática, Universidad de Chile

Verano 2010, Resumen clases

Una transformada integral es una aplicación que asocia una función f con otra función, mediante

$$T(f(t))(s) = \int_A K(t,s)f(t)dt,$$

para alguna función K llamada núcleo y algún rango fijo A de integración. Casos:

- Si $K(s,t) = \frac{e^{-ist}}{2\pi}$ y rango $A = \mathbb{R}$, entonces tenemos la Transformada de Fourier.
- Si $K(s,t) = e^{-st}$ y rango $A = (0,\infty)$, se tiene la Transformada de Laplace.

Transformada de Laplace

- Su aplicación principal es que reduce las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes en ecuaciones algebraicas lineales.
- Algunos problemas que involucran ecuaciones diferenciales no homogéneas con coeficientes constantes suelen tener como parte no homogénea una función que no es continua, por lo que estos problemas es más sencillo cuando se utiliza la Transformada de Laplace.
- Se resuelven con facilidad ecuaciones diferenciales de coeficientes no constantes en derivadas parciales y ecuaciones integrales.
- Tienen su origen en las limitaciones de la Transformada de Fourier.

Definición

Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$. La Transformada de Laplace de f es la función F definida por:

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt. \quad (1)$$

El dominio de F es el conjunto de aquellos valores de s, para los cuales esta integral impropia converge.

Notación: $\mathcal{L}[f]$ ó $\mathcal{L}[f(t)]$.

Se llama abscisa de convergencia o asíntota de $\mathcal{L}[f]$ al número real s_c definido por:

$$s_c = \inf \operatorname{dom}(\mathcal{L}[f]).$$

Ejemplos:

1) $f(t) = 1,\ t \geq 0 \Rightarrow \mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s}$. $\operatorname{dom}(\mathcal{L}[f]) = (0, \infty)$.
2) $f(t) = e^{at},\ t \geq 0,\ a \in \mathbb{C} \Rightarrow \mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s-a}$, $\operatorname{dom}\mathcal{L}[f] = (Re(a), \infty)$.
3) $f(t) = \cos(wt) \Rightarrow \mathcal{L}[f](s) = \frac{s}{s^2+w^2},\ s > 0$.
4) $f(t) = \operatorname{sen}(wt) \Rightarrow \mathcal{L}[f](s) = \frac{w}{s^2+w^2},\ s > 0$.

Propiedad 1(Linealidad)

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Si $f, g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ son tales que $\mathcal{L}[f](s)$ y $\mathcal{L}[g](s)$ existan. Entonces

$$\mathcal{L}[f + \lambda g](s) = \mathcal{L}[f](s) + \lambda \mathcal{L}[g](s).$$

Ejemplo:

1) $f(t) = \cosh(t) \Rightarrow \mathcal{L}[f](s) = \frac{s}{s^2-1}$.

2) $f(t) = \mathrm{senh}(t) \Rightarrow \mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{s^2-1}$.

Condiciones de Existencia de la Transformada de Laplace

- La integral que define la Transformada de Laplace no converge necesariamente.
- Por ejemplo $\mathcal{L}[1/t]$ ni $\mathcal{L}[e^{t^2}]$ existen.
- Las condiciones suficientes que garantizan la existencia de $\mathcal{L}[f]$ sobre f son
  - continua a trozos
  - orden exponencial

Definición (Discontinuidad de Salto)

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ tiene una **discontinuidad de salto** en $t_0 \in (a, b)$ si f es discontinua en t_0 y los límites por la derecha e izquierda de f existen y son finitos.

Ejemplo:

$$f(t) = \begin{cases} t & , \quad 0 < t < 2 \\ \frac{t^2}{11} - 2 & , \quad t > 2 \end{cases}$$

tiene discontinuidad de salto en $t_0 = 2$.

Definición (Continuidad a Trozos)

$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es **continua a trozos** en $[0, \infty)$, si tiene un número finito ó numerable de discontinuidades de salto.

Ejemplos:

1)

$$f(t) = \begin{cases} t-3 & , \quad t < -3 \\ t^2 & , \quad -3 < t < 3 \\ -(t+3) & , \quad t > 3 \end{cases}$$

es continua a trozos.

2) $f(t) = t - [\![t]\!]$, $0 < t < 1$ extendida periodicamente a $[0, +\infty)$ con período 1, es continua a trozos.

3)

$$f(t) = \begin{cases} 1/t & , \quad t \neq 0 \\ 0 & , \quad t = 0 \end{cases}$$

no es continua a trozos.

Definición

Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, f es de orden exponencial si existen $\alpha \in \mathbb{R}$ y $t_0, M > 0$ tal que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$, $\forall t > t_0$.
Al menor de tales α se le llama **orden exponencial** de f.

Ejemplos:
1) $f(t) = t$ es de orden exponencial $\alpha = 1$.
2) $f(t) = e^{-t}$ es de orden exponencial $\alpha = 1$.
3) $f(t) = e^{5t}\text{sen}(2t)$ es de orden exponencial $\alpha = 5$.
4) $f(t) = e^{t^2}$ no es orden exponencial.

$C_\alpha = \{f : [0, \infty) \to \mathbb{R} : f \text{ continua a trozos y de orden exponencial } \alpha\}$

C_α es espacio vectorial.

Teorema

Si $f \in C_\alpha$ entonces para todo $s > \alpha$, existe $\mathcal{L}[f]$. Además, $\lim_{s\to\infty} \mathcal{L}[f](s) = 0$.

- Las condiciones para f no son necesarias para la existencia de $\mathcal{L}[f]$, i.e, existen funciones que no satisfacen las hipótesis del Teor., y en cambio poseen Transformada de Laplace. Por ejm. $f(t) = t^{-1/2}$ no es continua a trozos para $t \geq 0$, pero su TL existe.

Ejemplo: Considerar la función

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 < t < 5 \\ 2 & , \quad 5 < t < 7 \\ 0 & , \quad t > 7 \end{cases}$$

- f tiene discontinuidad saltos en $t = 5$ y $t = 7$, así f continua a trozos.
- Es de orden exponencial, pues cualquier función cte lo es.
- $$\mathcal{L}[f](s) = \frac{2}{s}(e^{-5s} - e^{-7s}).$$

Propiedades de Traslación

Teorema 1

Sea $f \in C_\alpha$ y considere $F(s) = \mathcal{L}[f](s)$. Si $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}[e^{at} f(t)](s) = F(s-a),$$

para $s > \alpha + a$.

Ejemplo: $\mathcal{L}[e^{at}\text{sen}(bt)](s) = \frac{b}{(s-a)^2+b^2}$, $s > a$.

Definición

Se llama **función de Heaviside o escalón unitario** a la función $H(x)$ definida por:

$$H(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ 1 & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Traslación a otra posición $x = a$:

$$H_a(x) = H(x-a) = \begin{cases} 0 & , \quad x < a \\ 1 & , \quad x \geq a \end{cases}$$

Propiedades de Traslación

La función de Heaviside es usado para expresar funciones definidas por tramos:

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \begin{cases} g(t) & , \quad 0 \leq t < a \\ h(t) & , \quad t \geq a \end{cases} \\
&= g(t) + \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq t < a \\ h(t) - g(t) & , \quad t \geq a \end{cases} \\
&= g(t) + (h(t) - g(t))H_a(t).
\end{aligned}
$$

Transformada de la función Heaviside

$$\mathcal{L}[H_a(t)](s) = \frac{1}{s}e^{-as}, \quad s > 0.$$

Ejemplo: Considere

$$f(x) = \begin{cases} 3 & , \quad x < 2 \\ -2 & , \quad 2 \leq x < 5 \\ 1 & , \quad x \geq 5 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f(x) = 3 - 5H_2(x) + 3H_5(x)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(x)](s) &= 3\mathcal{L}[1](s) - 5\mathcal{L}[H_2(x)](s) + 3\mathcal{L}[H_5(x)](s) \\ &= \frac{3}{s} - \frac{5}{s}e^{2s} + \frac{3}{s}e^{-5s}, \quad s > 0.\end{aligned}$$

Definición(función Pulso)

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tq $a < b$. La función pulso P_{ab} entre a y b es definido como

$$P_{ab}(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < a \\ 1 & , \quad a \leq t < b \\ 0 & , \quad t \geq b \end{cases}$$

Notar que $P_{ab}(t) = H_a(t) - H_b(t)$. Así

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[P_{ab}(t)](s) &= \mathcal{L}[H_a(t)](s) - \mathcal{L}[H_b(t)](s) \\ &= \frac{1}{s}e^{-as} - \frac{1}{s}e^{-bs}, \quad s > 0.\end{aligned}$$

Teorema 2

Si $a > 0$, entonces

$$\mathcal{L}[H_a(t)f(t-a)](s) = e^{-as}\mathcal{L}[f(t)](s).$$

Ejemplo: La transformada de Laplace de

$$g(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 3 \\ t & , \quad t \geq 3 \end{cases}$$

es

$$\mathcal{L}[H_3(t)f(t-3)](s) = e^{-3s}\left(\frac{1}{s^2} + \frac{3}{s}\right),$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < 0 \\ t+3 & , \quad t \geq 0 \end{cases}$$

Teorema 3

Sea $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ continua y de orden exponencial α. Si f' es continua a trozos, entonces existe $\mathcal{L}[f']$ para $s > \alpha$ y

$$\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}[f(t)](s) - f(0^+).$$

Caso 2da derivada:

$$\mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2\mathcal{L}[f(t)](s) - sf(0^+) - f'(0^+).$$

Teorema 4

Supongamos que $f \in \mathcal{C}^{n-1}([0, \infty))$ y que $f, f', \ldots, f^{(n-1)}$ son de orden exponencial α. Si $f^{(n)}$ es continua a trozos en $[0, \infty)$, entonces existe $\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]$ para $s > \alpha$ y se cumple:

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)](s) = s^n\mathcal{L}[f(t)](s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0^+).$$

Teorema 5

Sea $f \in C_\alpha$ localmente integrable. Sea $a \in \mathbb{R}$ y defina $F(t) = \int_a^t f(u)du$. Entonces,

$$\mathcal{L}[F(t)](s) = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)](s) - \frac{1}{s}\int_0^a f(u)du, \quad s > \alpha.$$

En general

$$\mathcal{L}\left[\int_a^t \dots \int_a^t f(u)du\right](s) = \frac{1}{s^n}\mathcal{L}[f(t)](s) - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{s^k}\int_0^a \int_a^t \dots \int_a^t f(u)du.$$

Ejemplo:

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \cos(t)dt\right](s) = \frac{\mathcal{L}(\cos(t))}{s} = \frac{1}{s^2+1}.$$

Definición

Sean $f, g \in C_\alpha$. El **producto de convolución** entre f y g se define como:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(u)g(t-u)du.$$

Obs. Haciendo $\tau = t - u$, se muestra que $f * g = g * f$.

Teorema 6

Sean $f, g \in C_\alpha$, entonces

$$\mathcal{L}[f * g](s) = \mathcal{L}[f(t)](s)\mathcal{L}[g(t)](s).$$

Ejemplo: Sean $f(t) = e^t$ y $g(t) = \text{sen}(t)$, entonces

$$\mathcal{L}[(f * g)(t)](s) = \mathcal{L}[e^t](s)\mathcal{L}[\text{sen}(t)](s) = \frac{1}{s-1}\frac{1}{s^2+1}.$$

Teorema 7

Sea $f \in C_\alpha$ y denote por $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$. Entonces

$$\mathcal{L}[t^n f(t)](s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s), \quad s > \alpha.$$

Ejemplo:

$$\mathcal{L}[t\text{sen}(bt)](s) = \frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}.$$

Teorema 8

Sea $f \in C_\alpha$ y denote $F(s) = \mathcal{L}[f(t)](s)$. Si $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ existe, entonces

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right](s) = \int_s^\infty F(u)du.$$

Obs. La existencia de $\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t}$ es necesaria para la existencia de G.
Obs. La igualdad anterior es equivalente a:

$$\int_s^\infty F(u)du = \int_0^\infty e^{-st}\frac{f(t)}{t}dt.$$

Haciendo $s \to 0$, tenemos:

$$\int_0^\infty F(u)du = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt.$$

Ejemplo:

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}.$$

Definición

Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que es periódica con período T $(T > 0)$ si $f(t+T) = f(t)$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Teorema 9

Sea $f \in C_\alpha$ y periódica con período T. Entonces

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt.$$

Ejemplo 1:

Resolver $f(t) = 3t^2 - e^{-t} - \int_0^t f(\theta)e^{t-\theta}d\theta$.

Aplicando transformada de Laplace nos resulta:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(f) &= 3\mathcal{L}(t^2) - \mathcal{L}(e^{-t}) - \mathcal{L}(\int_0^t f(\theta)e^{t-\theta}d\theta) \\
&= 3\mathcal{L}(t^2) - \mathcal{L}(e^{-t}) - \mathcal{L}(f(t) * e^t) \\
&= \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1} - \mathcal{L}(f(t))\mathcal{L}(e^t) = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s-1}\mathcal{L}(f(t))
\end{aligned}$$

el cual es equivalente a:

$$\mathcal{L}(f) = \frac{6}{s^3} - \frac{6}{s^4} + \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1}.$$

Aplicando transformada inversa:

$$f(t) = 3t^2 - t^3 + 1 - 2e^{-t}.$$

Ejemplo 2:

Resolver el problema $\left\{ \begin{array}{c} y'' + 2ty' - 4y = 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{array} \right.$.

Recordar la propiedad: $\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}\mathcal{L}(f)$.
Aplicando transformada de Laplace nos resulta:

$$\begin{aligned}
& \mathcal{L}(y'') + 2\mathcal{L}(ty') - 4\mathcal{L}(y) = \mathcal{L}(1) \\
\Leftrightarrow \quad & (s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) - 2\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y') - 4Y(s) = \frac{1}{s} \\
\Leftrightarrow \quad & s^2 Y(s) - 2\frac{d}{ds}(sY(s) - y(0)) - 4Y(s) = \frac{1}{s} \\
\Leftrightarrow \quad & s^2 Y(s) - 2(Y(s) + sY'(s)) - 4Y(s) = \frac{1}{s} \\
\Leftrightarrow \quad & Y'(s) + (\frac{3}{s} - \frac{s}{2})Y(s) = -\frac{1}{2s^2} \quad \text{(ED lineal 1er orden en } s\text{)}
\end{aligned}$$

La solución de la ED es:

$$Y(s) = \frac{1}{s^3} + \frac{C}{s^3} e^{\frac{s^2}{4}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Recordar que $\lim_{s\to\infty} Y(s) = 0$, esto es posible siempre y cuando $C = 0$. Por tanto, $Y(s) = \frac{1}{s^3}$. Luego $y(t) = \frac{t^2}{2}$.

Ejemplo 3:

Resolver el problema $\begin{cases} ty'' + 4y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$.

Aplicando transformada de Laplace nos resulta:

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(ty'') + \mathcal{L}(y) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{d}{ds}\mathcal{L}(y'') + Y(s) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & -\frac{d}{ds}(s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)) + Y(s) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (2sY(s) + s^2 Y'(s)) - Y(s) = 0 \quad \text{(ED a variables separables)} \end{aligned}$$

Esta ED tiene por solución: $Y(s) = C\frac{1}{s^2}e^{-1/s}$.

Recordar: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$, entonces

$$\begin{aligned} Y(s) &= C\frac{1}{s^2}\left(1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^2} - \frac{1}{3!}\frac{1}{s^3} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{s^n} + \ldots\right) \\ &= C\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{s^4} - \frac{1}{3!}\frac{1}{s^5} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{s^{n+2}} + \ldots\right) \end{aligned}$$

por lo que

$$y(t) = C(t - \frac{t^2}{2!} + \frac{1}{2}\frac{t^3}{3!} - \frac{1}{3!}\frac{t^4}{4!} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n!}\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \ldots).$$

Ejemplo 4:

Resolver el sistema de 1er orden $\begin{cases} x_1'(t) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1(t) \\ x_2'(t) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2(t) \end{cases}$ para $t > 0$, mediante transformada de Laplace

Sean $X_1(s) = \mathcal{L}(x_1(t))$, $X_2(s) = \mathcal{L}(x_2(t))$, $B_1(s) = \mathcal{L}(b_1(t))$ y $B_2(s) = \mathcal{L}(b_2(t))$ las transformadas de Laplace de $x_1(t)$, $x_2(t)$, $B_1(t)$ y $B_2(t)$, respectivamente. Entonces, al aplicar TL:

$$\begin{aligned} sX_1(s) - x_1(0) &= a_{11}X_1(s) + a_{12}X_2(s) + B_1(s) \\ sX_2(s) - x_2(0) &= a_{21}X_1(s) + a_{22}X_2(s) + B_2(s) \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} (s - a_{11})X_1(s) - a_{12}X_2(s) &= B_1(s) + x_1(0) \\ -a_{21}X_1(s) + (s - a_{22})X_2(s) &= B_2(s) + x_2(0) \end{aligned}$$

Entonces, $X_1(s)$ y $X_2(s)$ pueden ser encontradas con la regla de Cramer:

$$X_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} B_1(s) + x_1(0) & -a_{12} \\ B_2(s) + x_2(0) & s - a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{22} \end{vmatrix}}; \quad X_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s - a_{11} & B_1(s) + x_1(0) \\ -a_{21} & B_2(s) + x_2(0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{22} \end{vmatrix}}$$

Ejemplo 5:

Resolver el sistema de 1er orden $\begin{cases} x_1'(t) = x_1 - x_2 + e^t\cos(t) \\ x_2'(t) = x_1 + x_2 + e^t\text{sen}(t) \end{cases}$, con $x_1(0) = x_2(0) = 0$.

Notemos que $\mathcal{L}(e^t\cos(t)) = \frac{s-1}{(s-1)^2+1}$ y $\mathcal{L}(e^t\text{sen}(t)) = \frac{1}{(s-1)^2+1}$. Usando lo anterior, deducimos que

$$X_1(s) = \frac{\begin{vmatrix} \frac{s-1}{(s-1)^2+1} & 1 \\ \frac{1}{(s-1)^2+1} & s-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-1 & 1 \\ -1 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{(s-1)^2}{(s-1)^2+1} - \frac{1}{(s-1)^2+1}}{(s-1)^2+1} = \frac{(s-1)^2-1}{((s-1)^2+1)^2}$$

$$X_2(s) = \frac{\begin{vmatrix} s-1 & \frac{s-1}{(s-1)^2+1} \\ -1 & \frac{1}{(s-1)^2+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-1 & 1 \\ -1 & s-1 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{s-1}{(s-1)^2+1} + \frac{s-1}{(s-1)^2+1}}{(s-1)^2+1} = \frac{2(s-1)}{((s-1)^2+1)^2}$$

Calculando las inversas:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{(s-1)^2-1}{((s-1)^2+1)^2}\right) = e^t\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2-1}{(s^2+1)^2}\right) \\ &= e^t\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{d}{ds}(-\frac{s}{s^2+1})\right) = e^t t\mathcal{L}^{-1}(\frac{s}{s^2+1}) = te^t\cos(t). \end{aligned}$$

De forma análoga:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2(s-1)}{((s-1)^2+1)^2}\right) = e^t\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2s}{(s^2+1)^2}\right) \\ &= e^t\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{d}{ds}(-\frac{1}{s^2+1})\right) = e^t t\mathcal{L}^{-1}(\frac{1}{s^2+1}) = te^t\text{sen}(t). \end{aligned}$$

Por tanto, la solución del sistema es: $x(t) = \begin{pmatrix} te^t\cos(t) \\ te^t\text{sen}(t) \end{pmatrix}$.

La delta de Dirac

En muchos sistemas mecánicos, eléctricos, etc., actúan fuerzas externas muy grandes en un intervalo corto de tiempo, por ejemplo, un golpe de un martillo, un relámpago en un sistema eléctrico.

Definición

La función impulso unitario es definido por:

$$\delta_{t_0}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2t_0} & , \quad |t| \leq t_0 \\ 0 & , \quad |t| > t_0 \end{cases}$$

con $t_0 \in \mathbb{R}_+$.

La función trasladada es:

$$\delta_{t_0}(t-a) = \begin{cases} \frac{1}{2t_0} & , \quad |t-a| \leq t_0 \\ 0 & , \quad |t-a| > t_0 \end{cases}$$

con $t_0, a \in \mathbb{R}_+$.

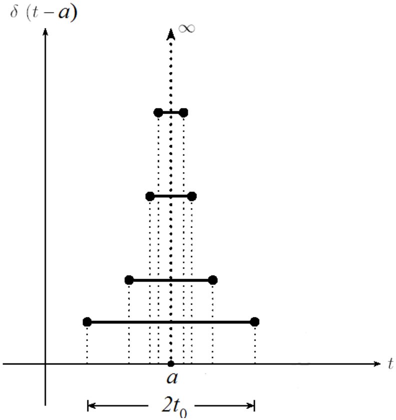
Propiedad: $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_{t_0}(t-a)dt = 1$, $\mathcal{L}(\delta_{t_0}(t-a))(s) = e^{-as}(\frac{e^{st_0}-e^{-st_0}}{2t_0 s})$.

La delta de Dirac

Definición

La delta de Dirac es definido por el límite

$$\delta(t-a) = \lim_{t_0 \to 0} \delta_{t_0}(t-a).$$



Propiedades:

$$\delta(t-a) = \begin{cases} 0 & , \quad t \neq a \\ +\infty & , \quad t = a \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)dt = 1.$$

Sea f una función continua en $\mathbb{R}$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_{t_0}(t-a)dt &= \frac{1}{2t_0}\int_{a-t_0}^{a+t_0} f(t)dt \\ &= \frac{1}{2t_0} 2t_0 f(c) = f(c) \quad \text{TVM para integrales} \end{aligned}$$

con $c \in (a-t_0, a+t_0)$. Haciendo $t_0 \to 0$ tenemos que $c \to a$ y por continuidad de f, $f(c) \to f(a)$ cuando $t_0 \to 0$. Por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a) = \lim_{t_0 \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta_{t_0}(t-a) = f(a).$$

$$\mathcal{L}(\delta(t-a))(s) = \int_0^{\infty} e^{-st}\delta(t-a)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\delta(t-a)dt = e^{-as}.$$

Caso particular: $\mathcal{L}(\delta(t))(s) = 1$.

Observación: Notamos que la transformada de Laplace no cumple que debe de tender a cero cuando $s \to +\infty$, esto nos indica que la delta de Dirac no es de orden exponencial. Esto sucede pues esta función no es función ordinaria.

Propiedad

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(u-a)du = \begin{cases} 0 & , \quad t < a \\ 1 & , \quad t > a \end{cases} = H_a(t)$$