

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

(Teoremas de Existencia y Unicidad)

Julio López

`jclopez@dim.uchile.cl`

Depto Ingeniería Matemática, Universidad de Chile

Otoño 2011, Resumen clases

Consideremos el Problema de Cauchy:

$$(PC) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y), & \forall x \in I \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

Ejemplo 1:

$$\begin{cases} y' = 2\sqrt{y} \\ y(2) = 0. \end{cases}$$

Solución:

► $y(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (Solución constante)

►

$$y(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 2 \\ (x-2)^2 & , \quad x \geq 2. \end{cases}$$

Ambas satisfacen la condición inicial, así tiene cuando menos 2 soluciones.

Ejemplo 2:

$$\begin{cases} y' &= -y^2 \\ y(0) &= 0. \end{cases}$$

Solución:

► $y(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (Solución constante)

►

$$y(x) = \frac{1}{x + c}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ambas son soluciones de la E.D., pero en la 2da no podemos encontrar $c \in \mathbb{R}$ tq se verifique $y(0) = 0$.

Ejemplo 3:

$$\begin{cases} xy' &= y - 1 \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

Solución:

- ▶ $y(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$ (solución constante)
- ▶ Solucionando via separación variables:

$$y(x) = 1 + c x, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ambas satisfacen la condición inicial, por tanto, este PVI tiene infinitas soluciones.

Ejemplo 4:

$$\begin{cases} y' &= x \\ y(0) &= 1. \end{cases}$$

Solución:

$$y(x) = \frac{x^2}{2} + 1.$$

Tiene solución única.

Ejemplo 5:

$$\begin{cases} y' &= 2\sqrt{y} \\ y(0) &= -1. \end{cases}$$

Solución:

- ▶ $y(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$ (solución constante)
- ▶ $y(x) = (x + c)^2$.

No tiene soluciones. No podemos tener $y(0) = -1$ puesto que la E.D esta definida sólo si $y \geq 0$

Existencia y Unicidad de Soluciones

De estos ejemplos puede verse que un PVI puede no tener soluciones, tener exactamente una solución o tener más de una solución.

Esto lleva a las siguientes 2 preguntas:

Problema de Existencia

¿Bajo que condiciones un problema de Cauchy tiene al menos una solución?

Problema de Unicidad

¿Bajo que condiciones dicho problema tiene una única solución?

A los teoremas que establecen dichas condiciones se les llama
Teoremas de Existencia y Unicidad

Definición

Decimos que una función $f : I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es **globalmente Lipschitz** c/r a la 2da variable con constante $L > 0$, si para cada $x \in I$ se tiene:

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq L\|y_1 - y_2\|, \quad \forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n.$$

Definición

Decimos que una función $f : I \times D \subset I \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es **localmente Lipschitz** c/r a la 2da variable con constante $L_0 > 0$, si cada $y \in D$ tiene un entorno D_0 tal que para cada $x \in I$

$$\|f(x, y_1) - f(x, y_2)\| \leq L_0\|y_1 - y_2\|, \quad \forall y_1, y_2 \in D_0,$$

donde L_0 es la constante de Lipschitz.

Teorema de Existencia y Unicidad Globales

Sea I un intervalo. Supongamos que $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua c/r a su 1ra variable y globalmente Lipschitz c/r a su 2da variable. Entonces para cada $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$ existe una única solución $y \in \mathcal{C}^1(I)$ del Problema de Cauchy (PC).

Ejemplo: Considere la E.D $y' = 1 - |y|$.

En este caso $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está definida por $f(x, y) = 1 - |y|$.

- Es claro que f es continua c/r a su 1ra variable.
- Veamos que es globalmente Lipschitz:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |1 - |y_1| - 1 + |y_2|| = ||y_1| - |y_2|| \leq |y_1 - y_2|,$$

donde $L = 1$. Por tanto, para cada $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ pasa una única curva integral.

Existencia y Unicidad de Soluciones

Ejemplo (ver ejemplo 2): Considere la E.D $y' = -y^2$.

- ▶ $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tq $f(x, y) = -y^2$.
- ▶ f es continua en 1ra variable.
- ▶ Veamos si es globalmente Lipschitz:

$$|-y_1^2 + y_2^2| = |y_1 + y_2||y_1 - y_2| \underbrace{\leq L|y_1 - y_2|}_{i?}$$

No podemos encontrar $L > 0$ tq sea independiente de y_1, y_2 . Queda analizar si existe solución por lo menos local.

Teorema de Existencia y Unicidad Local

Sea I un intervalo y tomemos $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. Supongamos que $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en x_0 y que existen $r, \delta, L > 0$ tal que $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ siempre que $y_1, y_2 \in [y_0 - r, y_0 + r]$ y $x \in I \cap [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Denotemos por $M = \max\{|f(x, y)| : x \in I, |x - x_0| \leq \delta, |y - y_0| \leq r\}$, $\delta_0 = \min\{\delta, r/M\}$ y $J = I \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$. Entonces existe una única solución local $y \in \mathcal{C}^1(J)$.

Ejemplo (ver ejemplo 2): Considere el PVI

$$\begin{cases} y' &= -y^2 \\ y(0) &= y_0 > 0. \end{cases}$$

► Localmente Lipschitz en un entorno de y_0 :

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| = |y_1 + y_2||y_1 - y_2| \leq 2(y_0 + r)|y_1 - y_2|.$$

El Teorema implica que $\exists!$ sol. local $y \in \mathcal{C}^1(J)$.

Cálculo de M y δ_0 :

$$M = \max\{|y^2| : |y - y_0| \leq r\} = (y_0 + r)^2.$$

$\delta_0 = \frac{r}{(y_0 + r)^2}$. Como todo lo anterior es válido para cualquier $r > 0$, podemos tener:

$$\delta_0 = \max_{r>0} \frac{r}{(y_0 + r)^2} = \frac{1}{4y_0}.$$

Así, la única solución está definida en $(-\frac{1}{4y_0}, \frac{1}{4y_0})$.

Existencia y Unicidad de Soluciones

Observación: La solución de la ED del ejemplo es:

$$y(x) = \frac{1}{x + c},$$

la cual esta definida para $x \neq -c$. Así tenemos, dependiendo de la cte c , que la función y esta definida en $y : (-\infty, -c) \rightarrow \mathbb{R}$ ó $y : (-c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Bajo la condición inicial, $c = \frac{1}{y_0} > 0$. Como $x_0 = 0 \in (-\frac{1}{y_0}, \infty)$ entonces $y : (-\frac{1}{y_0}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

Este intervalo es más grande que predice el teorema.

Observamos que cuando $y_0 = 0$ (**ver ejemplo 1**) no esta definido este intervalo, por lo que se considera como única solución, la solución cte $y = 0$.

Definición

La solución definida sobre el abierto más grande donde existe la solución, es llamada **Solución maximal**.

Ejemplo: La función $y : (-\frac{1}{y_0}, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $y(x) = \frac{1}{x + \frac{1}{y_0}}$ es solución maximal.

Criterio para comprobar la Condición de Lipschitz:

A menudo es difícil verificar directamente la condición de Lipschitz, por lo que se hará uso del sgte resultado.

Lema

Sea $f : I \times D \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, con D abierto y conexo de $\mathbb{R}^n$. Si $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe y es continua en $I \times D$, entonces f es localmente Lipschitz en y en $I \times D$.

Teorema de Existencia y Unicidad Local

Sea I un intervalo y tomemos $(x_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$. Supongamos que existen $r, \delta > 0$ denotemos por

$M = \max\{|f(x, y)| : x \in I, |x - x_0| \leq \delta, |y - y_0| \leq r\}$, $\delta_0 = \min\{\delta, r/M\}$ y $J = I \cap (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$. Si $f(x, y)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en $J \times [y_0 - r, y_0 + r]$, entonces el PVI tiene una única solución local $y \in \mathcal{C}^1(J)$.

Ejemplo 1:

$$(PVI) \quad \begin{cases} y' &= 2\sqrt{y} \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f(x, y) &= 2\sqrt{y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{\sqrt{y}} \end{aligned} \right\} \text{ continuas en } \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++}$$

Esto implica que debemos elegir (x_0, y_0) tq $y_0 > 0$, y así tenemos existencia y unicidad local del PVI.

Ejemplo 2:

$$(PVI) \quad \begin{cases} xy' &= y - 1 \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f(x, y) &= \frac{y-1}{x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{1}{x} \end{aligned} \right\} \text{ continuas en } \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R}$$

Por tanto, para tener existencia y unicidad local del PVI, debemos elegir (x_0, y_0) tq $x_0 \neq 0$,

Ejemplo 3:

$$(PVI) \quad \begin{cases} y' &= -y^2 \\ y(x_0) &= y_0. \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned} f(x, y) &= -y^2 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -2y \end{aligned} \right\} \text{ continuas en todo } \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Por tanto, el PVI tiene única solución $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

En particular, si $(x_0, y_0) = (0, 1)$, $y(t) = \frac{1}{x+1}$, la cual es válida sólo en $(-1, +\infty)$.

Observación:

- Recordar que estos análisis son solo locales, mas no globales.
- Si comparamos con el ejemplo 3, en el caso $(x_0, y_0) = (0, 0)$ la solución no tiene la forma $y(t) = \frac{1}{x+c}$, para algún $c \in \mathbb{R}$, por lo que la única alternativa es aquí, la solución cte $y = 0$.

Lema (Desigualdad de Gronwall)

Sean $\beta : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ y $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas. Si existe $\alpha \geq 0$ tal que

$$\psi(t) \leq \alpha + \int_a^t \beta(s)\psi(s)ds,$$

entonces

$$\psi(t) \leq \alpha \exp \left(\int_a^t \beta(s)ds \right).$$

Este lema permite acotar las soluciones de ciertas ED.

Ejemplo: Si $y' \leq re^x y$. Hallar una cota para y en el intervalo $[0, 1]$.