Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

(Introducción y algunos métodos de solución)

Julio López
jclopez@dim.uchile.cl

Depto Ingeniería Matemática, Universidad de Chile

Otoño 2011, Resumen clases

Definición

Una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ se dice **homogénea de grado** $k \in \mathbb{N}_0$ si

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^k f(x, y), \quad \forall \lambda.$$

Ejemplos:

1) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2$ homogénea grado 2

2) $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ homogénea grado 0.

Definición

Una E.D de la forma $y' = f(x, y)$ se llama **homogénea** si f es homogénea de grado 0.

2) Obs.: La **ecuación homogénea** siempre se puede representar en la forma:

$$y' = \varphi(y/x)$$

Cambio de variable: $z = y/x$ ($\Rightarrow \ y = xz$)

$$y' = xz' + z \Leftrightarrow xz' + z = \varphi(z) \Leftrightarrow z' = \frac{\varphi(z) - z}{x}$$

Ejemplos:

1) $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$

2) $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$

Solución (2):

$$y' = \sqrt{1 - (y/x)^2} + y/x$$

Hacer $y = zx$:

$$xz' = \sqrt{1 - z^2} \Leftrightarrow z' = \frac{\sqrt{1 - z^2}}{x}$$

Solución cte: $\sqrt{1 - z^2} = 0 \Rightarrow z = \pm 1$ ($\Rightarrow y = \pm x$) $\leftarrow$ Sol. particular

$$\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \operatorname{arcsen}(z) = \ln(|x|) + \ln(c_1) = \ln(cx).$$

Obs. $|\ln(cx)| \leq \pi/2 \Leftrightarrow e^{-\pi/2} \leq cx \leq e^{\pi/2}$.
Así,

$$z = \operatorname{sen}(\ln(cx)) \Rightarrow y = x\operatorname{sen}(\ln(cx)).$$

Las soluciones $y = \pm x$ son singulares.

Definición 5 (E.D.O lineal)

Una E.D es **lineal** si tiene la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x).$$

- Si $h(x) = 0$, la EDO se llama lineal **homogénea**.
- Si $h(x) \neq 0$, la EDO se llama lineal **no homogénea**.

Definición (E.D.O lineal 1er Orden)

Una E.D de la forma:

$$a_1(x)y' + a_0(x)y = h(x).$$

donde $a_1(x) \neq 0$ en I y $a_1(x), a_0(x), h(x)$ son continuas en I se llama **E.D lineal de 1er orden**.

Método de Solución

Se puede escribir como:

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \qquad (1)$$

donde $p(x) = \frac{a_0(x)}{a_1(x)}$, $q(x) = \frac{h(x)}{a_1(x)}$.
Para $q(x) = 0$, la ED toma la forma de $\frac{dy}{dx} + p(x)y = 0$, la cual es lineal homogénea. Esta ED es a variables separables y tiene por solución:

$$y(x) = ce^{-\int p(x)dx}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Teniendo en cuenta esta solución, buscaremos la solución general de la forma:

$$y(x) = u(x)e^{-\int p(x)dx},$$

con u la función incógnita. Derivando y luego sustituyendo nos da:

$$u'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x), \quad \Leftrightarrow \quad u'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx}.$$

Luego

$$u(x) = \int (q(x)e^{\int p(x)dx})dx + K, \quad K \in \mathbb{R}.$$

Por tanto,

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[\int (q(x)e^{\int p(x)dx})dx + K\right], \quad K \in \mathbb{R}.$$

Este método de resolución se llama, **variación de parámetros**.
Otra alternativa, es usar el **Factor integrante**: F.I: $\mu(x) = \exp(\int p(x)dx)$.
Multiplicando (1) por $\mu(x)$ queda escrita

$$e^{\int p(x)dx}p(x)y + e^{\int p(x)dx}y' = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

que es equivalente a:

$$\frac{d}{dx}[e^{\int p(x)dx}y] = q(x)e^{\int p(x)dx}$$

de donde

$$e^{\int p(x)dx}y = \int (q(x)e^{\int p(x)dx})dx + c, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Así

$$y = e^{-\int p(x)dx}[\int (q(x)e^{\int p(x)dx})dx + c], \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo: Con un cambio de variable adecuado transformar la E.D. $y' + x\text{sen}(2y) = xe^{-x^2}\cos^2(y)$ en una E.D. lineal de 1er orden y resolverla.

Solución: Dividir por $\cos^2(y)$ (suponer $\neq 0$)

$$\sec^2 yy' + 2x\tan(y) = xe^{-x^2}$$

Hacer $z = \tan(y) \Rightarrow z' = \sec^2(y)y'$:

$$z' + 2xz = xe^{-x^2}$$

F.I: $\mu(x) = e^{x^2}$ Así:

$$e^{x^2}z' + 2xe^{x^2}z = x$$

de donde

$$z = e^{-x^2}(\frac{x^2}{2} + c) \Rightarrow \tan(y) = e^{-x^2}(\frac{x^2}{2} + c).$$

Ecuaciones Reducibles a Lineales

Ecuación de Bernoulli

Tiene la forma $y' + p(x)y = q(x)y^n$ con $n \neq 0, 1$.

Método de Solución

Hacer cambio de variable: $z = y^{1-n} \Rightarrow z' = (1-n)y^{-n}y'$.
Multiplicar la E.D por $(1-n)y^{-n}$ y sustituir la nueva variable:

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)q(x)$$

la cual es lineal de 1er orden.

Ejemplo: Resolver $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$.
Solución: Es equivalente a:

$$y' + \frac{2}{x} y = -x^4 e^x y^3, \quad n = 3$$

Cambio variable: $z = y^{-2} \Rightarrow z' = -2y^{-3} y'$.
Multiplicar la E.D por $-2y^{-3}$ y sustituir la nueva variable:

$$z' - \frac{4}{x} z = 2x^4 e^x.$$

F.I: $\mu(x) = \exp(-4 \int \frac{1}{x} dx) = x^{-4}$. Así

$$x^{-4} z' - \frac{4}{x^5} z = 2e^x \Rightarrow z = x^4 (2e^x + c)$$

$$y = x^{-2} (2e^x + c)^{-1/2}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ecuación de Riccati

Tiene la forma $y' + p(x)y + q(x)y^2 = r(x)$.

Método de Solución

1. Encontrar previamente una solución particular y_p (por cualquier camino).
2. Hacer el cambio de variable $y(x) = y_p(x) + \frac{1}{z(x)} \Rightarrow$ $y' = y_p' - \frac{1}{z^2}z'$

Reemplazando en la EDO:

$$(y_p' + p(x)y_p + q(x)y_p^2) - \frac{1}{z^2}z' + \frac{p(x)}{z} + 2\frac{q(x)y_p}{z} + \frac{q(x)}{z^2} = r(x).$$

Como y_p es solución, se obtiene:

$$z' - (p(x) + 2q(x)y_p)z = q(x).$$

Ejemplo: Resolver la ecuación de Riccati:

$$y' - \frac{1}{x}y - \frac{1}{x}y^2 = -\frac{2}{x}.$$

Solución: Observamos que $y_p(x) = 1$ es solución de la E.D.
Sea $y = 1 + \frac{1}{z} \Rightarrow y' = -\frac{1}{z^2}z'$.
Reemplazando en la EDO

$$z' + \frac{3}{x}z = -\frac{1}{x}.$$

<u>F.I</u>: $\mu(x) = \exp(\int \frac{3}{x}dx) = x^3$.
Multiplicamos por x^3:

$$x^3z' + 3x^2z = -x^2 \Rightarrow z = x^{-3}(c - \frac{x^3}{3})$$

Por tanto:

$$y = \frac{2x^3 + k}{k - x^3}, \quad k \in \mathbb{R}.$$