Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
(Introducción y algunos métodos de solución)

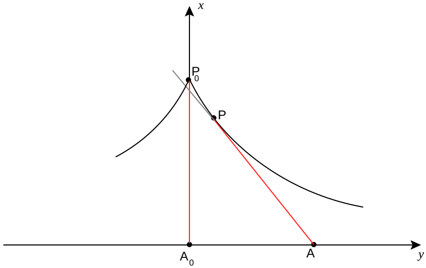
Julio López
jclopez@dim.uchile.cl

Depto Ingeniería Matemática, Universidad de Chile

Otoño 2011, Resumen clases

1.) Modelamiento de un problema Geométrico

Tractriz (equitangencial): Es la curva que describe un objeto arrastrado por otro, que se mantiene a distancia constante y se desplaza en linea recta.



▷ $P(x,y) \in \mathcal{C}$ ▷ $A(0, A_y)$

▷ $y'(x) = \frac{y - A_y}{x}$

▷ $d(P,A) = cte \Leftrightarrow c = x^2 + (y - A_y)^2 = x^2(1 + y'^2)$

2.) Familias Ortogonales

$\mathcal{F} = \{y = y(x) : y = ax^2, a \in \mathbb{R}\} \Leftarrow$ familia parábolas vértice (0,0).

$\triangleright$ $y' = 2ax$ $\quad\triangleright$ $y' = 2\frac{y}{x}$

Deseamos encontrar la familia: $\mathcal{G} = \{$curvas que intersectan de manera perpendicular a las parábolas de $\mathcal{F}\}$.

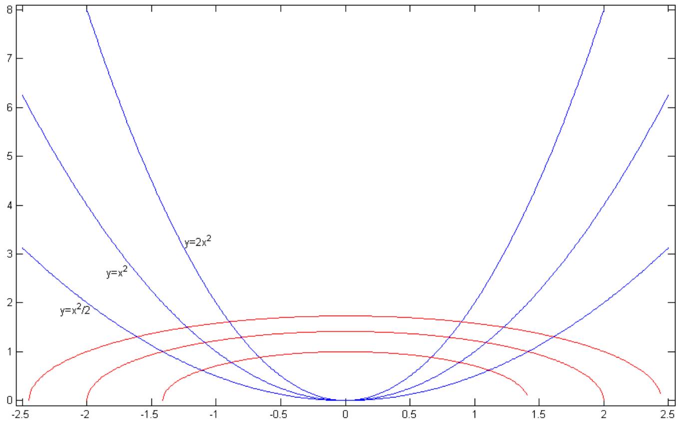
$\triangleright$ Sea $z \in \mathcal{G} \Rightarrow$

$$z'(x)y'(x) = -1, \quad \forall y \in \mathcal{F} \text{ y } \forall x \in \mathbb{R} \text{ tq } z(x) = y(x)$$

Así

$$z' = -\frac{1}{y'} = -\frac{x}{2y} = -\frac{x}{2z}$$

$$\frac{d}{dx}(z^2) = -x \;\Rightarrow\; \underbrace{\frac{z^2}{c} + \frac{x^2}{2c} = 1}_{\text{familia elipses}}$$


y=2x^2
y=x^2
y=x^2/2
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-2.5
-2
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5

Definiciones Básicas

Definición 1 (E.D)

Si una ecuación contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes, se dice que es una ecuación diferencial.

Definición 2 (E.D.O)

Si la ecuación contiene derivadas con respecto a una sola variable independiente se dice que es una ecuación diferencial ordinaria.

Definición 3 (E.D.P)

Si la ecuación contiene derivadas parciales con respecto a dos o más variables independientes se llama ecuación diferencial parcial.

Ejemplos

1) $y' + 4y = 5x$
2) $(x^2 - y)dx + 5\cos(y)dy = 0$
3) $y'' + 4(y')^3 + 3y = 0$

1) $x\dfrac{\partial u}{\partial x} + y\dfrac{\partial u}{\partial y} = 0$
2) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial u}{\partial y} = y - x$

Definiciones Básicas

Definición 4 (Orden)

La derivada o derivada parcial de orden más alto determina el orden de la E.D.

Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ y $n \in \mathbb{N}_0$. Denotemos por

$$\mathcal{C}^n(U) = \{g : U \to \mathbb{R} : g \text{ tiene derivadas continuas hasta el orden } n\}.$$

Decimos que una ecuación diferencial (de orden n) está expresada en forma **implícita** cuando tiene la forma

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$$

donde $F \in \mathcal{C}^0(U)$, con U abierto de $\mathbb{R}^{n+2}$.
Y decimos que está expresada en forma **explícita** cuando tenemos

$$y^{(n)} = f(x, y(x), y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n-1)}(x))$$

con $f \in \mathcal{C}^0(D)$ y D abierto de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Definición 5 (E.D.O lineal)

Una E.D es **lineal** si tiene la forma:

$$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_1(x)y' + a_0(x)y = Q(x).$$

- Si $Q(x) = 0$, la EDO se llama lineal **homogénea**.
- Si $Q(x) \neq 0$, la EDO se llama lineal **no homogénea**.
- Si los coeficientes $a_i(x)$ no dependen de x, se dice que la EDO lineal es a **coeficientes constantes**. De lo contrario se dice que es a **coeficientes variables**.
- Una ecuación que no es lineal se dice **no lineal**.

Ejemplos:

1) $x^2y'' + \text{sen}(x)y' + x^2y = 5e^x + x$ ← lineal de orden 2 no homogénea
2) $(1 - x^2)y''' - xy^2 = 0$ ← no lineal de orden 3 homogénea
3) $y^2y'' + yy' + xy = x^2 + \cos(x)$ ← no lineal de orden 2 no homogénea

Definición 6 (Curva Integral)

Una **solución o curva integral** de la EDO $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ es una función $\varphi \in \mathcal{C}^n(I)$, donde $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo, tal que
$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad \forall x \in I.$$

Ejemplos:

1. $y = e^{2x}$ es solución de $y' = y + e^{2x}$. También $y = e^{2x} + e^x$ es solución de la EDO. En general $y = e^{2x} + ce^x$ es solución $\forall c \in \mathbb{R}$.

2. $x = y\ln(cy)$ es solución de $y'(x + y) = y$. En efecto: Derivando implícitamente:

$$1 = \frac{dy}{dx}\ln(cy) + y\frac{1}{cy}c\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}(\ln(cy) + 1).$$

Así
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\ln(cy) + 1} = \frac{1}{\frac{x}{y} + 1}.$$

Definiciones Básicas

Definición (Solución Constante)

La función $y(x) = y_0$ es llamada **solución constante** de la EDO $y' = f(x, y)$ si $f(x, y_0) = 0$, $\forall x \in I \subset \mathbb{R}$.

Ejemplo:

1. $y' = \frac{2y(1-4y)}{x-1}$, dominio: $D = \{(x, y) : x \neq 1\}$.
   Soluciones ctes: $\varphi_1, \varphi_2 : (-\infty, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 1/4$
   $\varphi_3, \varphi_3 : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tq $\varphi_1(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 1/4$
2. $y' = \frac{x(1-y^2)}{y(x^2+1)}$, con $y \neq 0$. Dominio $D = \{(x, y) : y \neq 0\}$.
   Como $\frac{1-y^2}{y} = 0 \Leftrightarrow y = \pm 1$, tenemos las soluciones ctes:
   $u_1, u_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tq $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = -1$

Los ptos en los que el 2do miembro de la E.D. $y' = f(x, y)$ no esta definido, se llaman **puntos singulares**.

En algunos casos, una E.D tiene una solución que no se puede obtener particularizando el parámetro constante de la familia de soluciones. Tal solución es llamada **solución singular**.

Ejemplo: $y' = xy^{1/2}$

- Solución cte: $y = 0$
- Solución general: $y = (\frac{x^2}{4} + c)^2$

La solución cte es singular, pues no existe un $c \in \mathbb{R}$ tq a partir de la sol. general se recupere la solución cte $y = 0$.

Idea: Interpretar el significado de $y' = f(x,y)$.
La pendiente de una solución $\varphi(x)$ de esta ED en un pto (x_0, y_0) coincide con $f(x_0, y_0)$, i.e

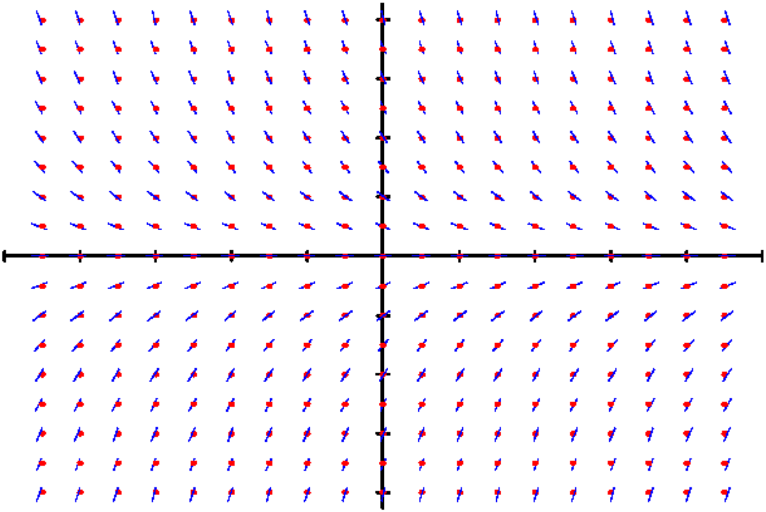
$$m_{x_0} = \varphi'(x_0) = f(x_0, y_0)$$

A) Método de campos de dirección: Seguir los sgtes pasos:

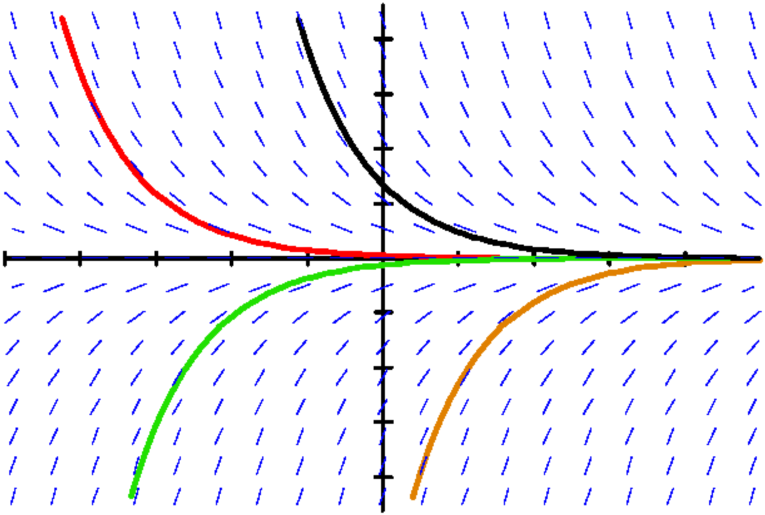
1. Tome una colección de ptos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y dibuje un segmento de recta que tenga pendiente $m = f(x,y)$. El conj. de estos segmentos de recta es llamado **campo de direcciones**.
2. Trazar la curva solución haciéndola pasar por los ptos de tal manera que los segmentos de recta sean tangentes a esta curva.

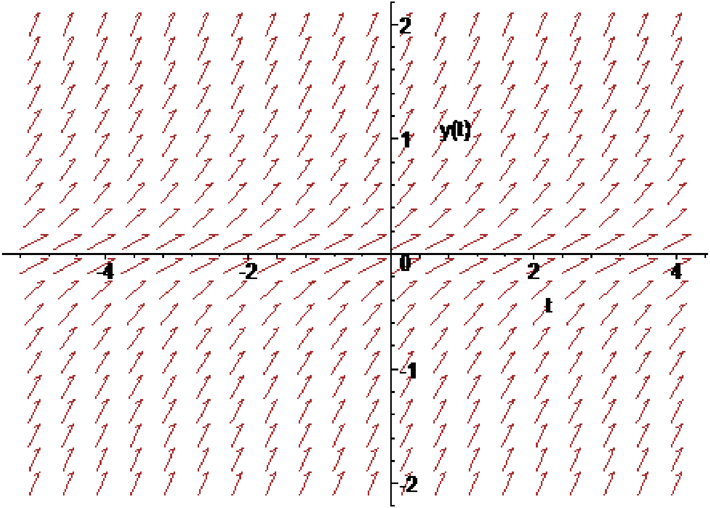
Ejemplos:
1) $y' = -y$, $y = 0 \leftarrow$ sol. cte
2) $y' = \sqrt{|y|}$, $y = 0 \leftarrow$ sol. cte.

Campos de Direcciones (Ejm 1)

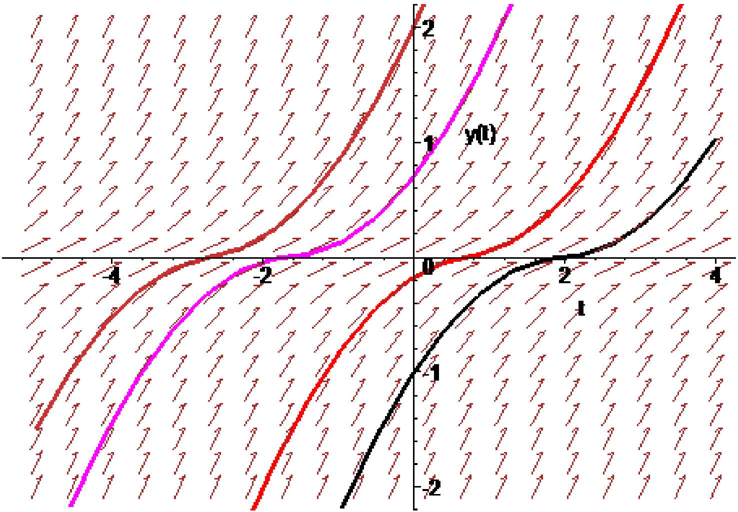


Campos de Direcciones (Trazado de curvas)





2
1
-1
-2
y(t)
-4
-2
0
2
4
t


2
1
y(t)
-4
-2
0
2
4
t
-1
-2

B) Método de las Isoclinas: Seguir los siguientes pasos

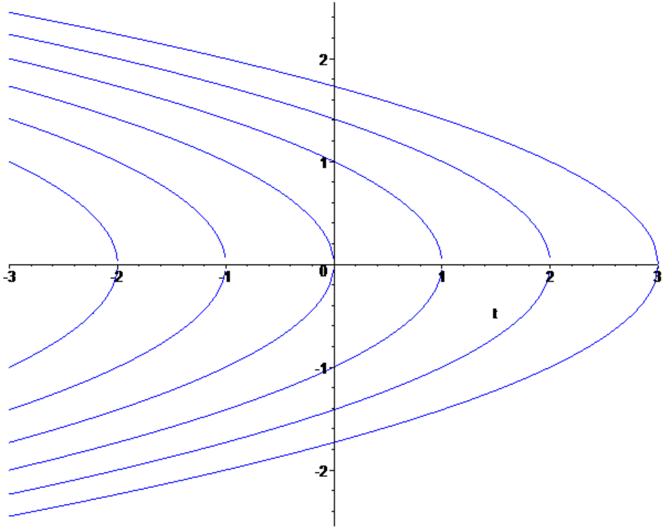
1. Trazar las curvas $f(x, y) = c$, variando los valores de c. Tales curvas son llamadas **Isoclinas o curvas de nivel**
2. Tome una colección de ptos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ y dibuje un segmento de recta que tenga pendiente $m = f(x, y)$.
3. Trazar la curva solución haciéndola pasar por los ptos de tal manera que los segmentos de recta sean tangentes a esta curva.

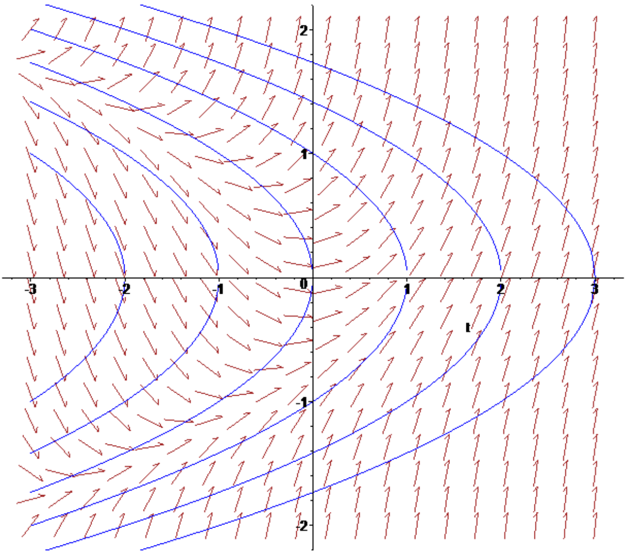
Obs. A menudo es más fácil dibujar el campo de direcciones si previamente se conocen algunas isoclinas.

Ejemplos:

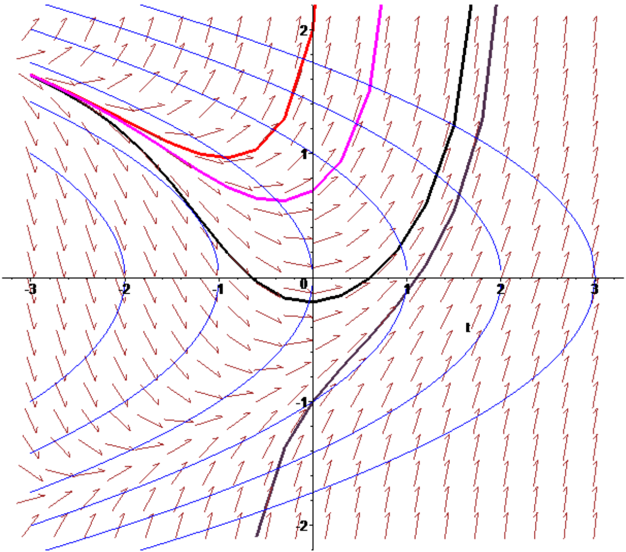
1) $y' = x + y^2$
2) $y' = \text{sen}(x) - y$
3) $y' = \text{sen}(x + y)$

Trazado de Isoclinas (Ejm 1)



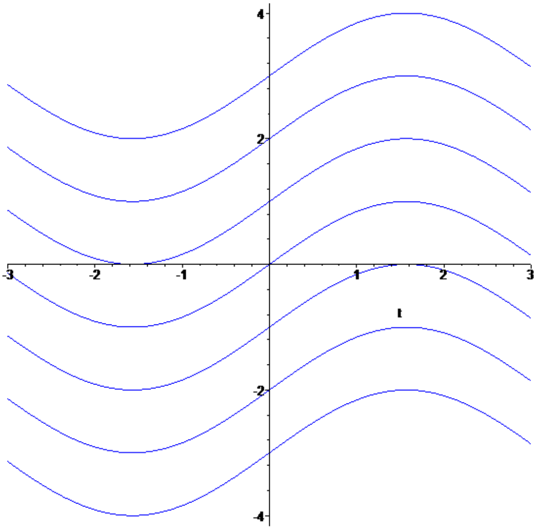


2
1
0
-1
-2
-3
-2
-1
1
2
3
t

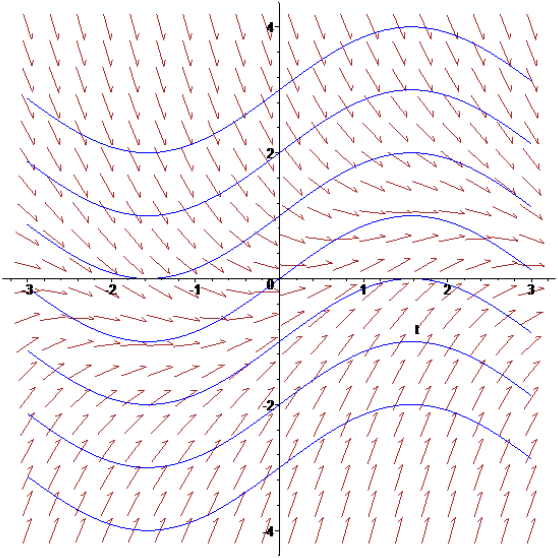


2
1
-3
-2
-1
0
1
2
3
t
-1
-2

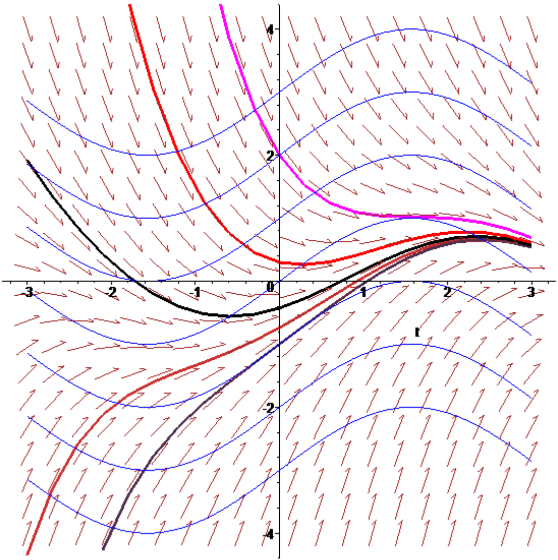
Trazado de Isoclinas (Ejm 2)



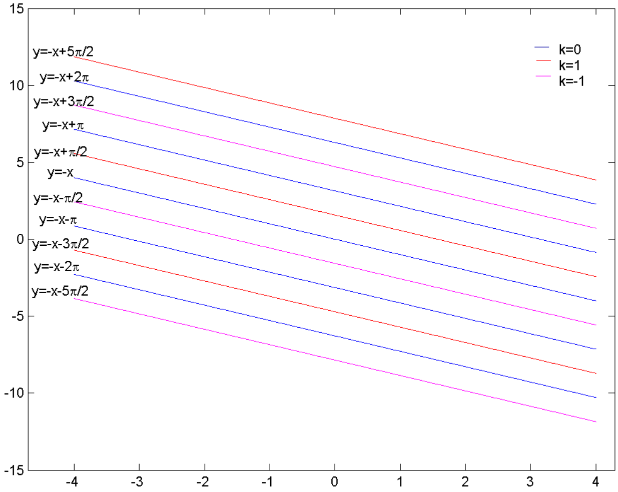
Campos de Direcciones sobre las Isoclinas



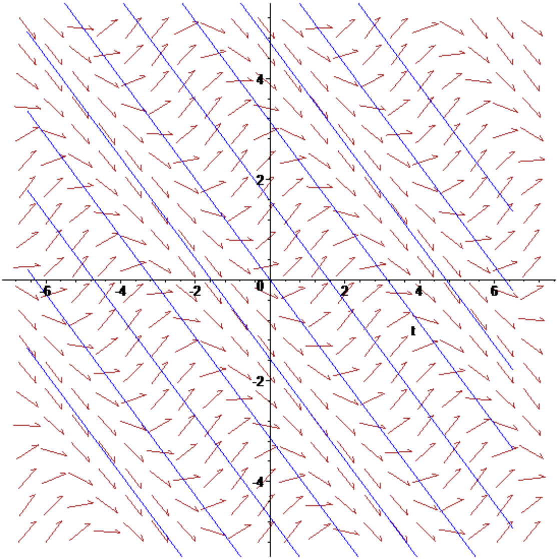
Trazado de curvas soluciones



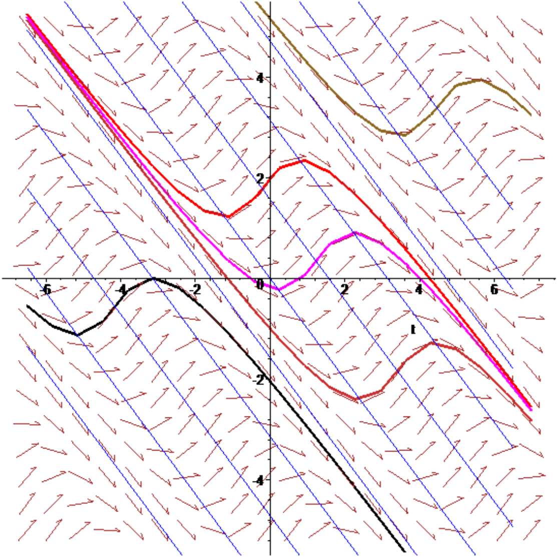
Trazado de Isoclinas (Ejm 3)



Campos de Direcciones sobre las Isoclinas



Trazado de curvas soluciones



Observaciones

1. La isoclina nula $f(x, y) = 0$ proporciona las líneas en las que puedan estar situadas los puntos máximos y mínimos de las curvas integrales.
2. Para mayor exactitud se halla también el lugar geométrico de los puntos de inflexión. Para ello se halla y'':
$$y'' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} y'$$
y se iguala a cero.
3. La línea determinada por la ec.
$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} f(x, y) = 0$$
es el L.G. de los puntos de inflexión.

Considerar $y' = f(x)$. Si f es integrable, las curvas integrables existen:

$$y = \int f(x)dx + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

Ejemplos:
1) $y' = \text{sen}(x) \Rightarrow y = -\cos(x) + C$
2) $y' = \frac{1}{x}$, $x \neq 0 \Rightarrow y = \ln(|x|) + C$.
Se puede escribir como: $y = \ln(k|x|)$, $k > 0$.

Definición:

Se dice que una E.D de la forma $y' = g(x)h(y)$ es de **variable separable**.

- Si $h(y_0) = 0$, $y(x) = y_0$ es solución constante.
- Si $h(y) \neq 0$:

$$\frac{y'(x)}{h(y(x))} = g(x).$$

Sea $H(s) = \int \frac{ds}{h(s)}$, i.e $H'(s) = \frac{1}{h(s)}$. Entonces (regla cadena)

$$\frac{d}{dx}H(y(x)) = H'(y(x))y'(x) = \frac{y'(x)}{h(y(x))}.$$

Si hacemos $G(x) = \int g(x)dx$ (primitiva de $g(x)$), entonces

$$\boxed{H(y) = G(x) + C.}$$

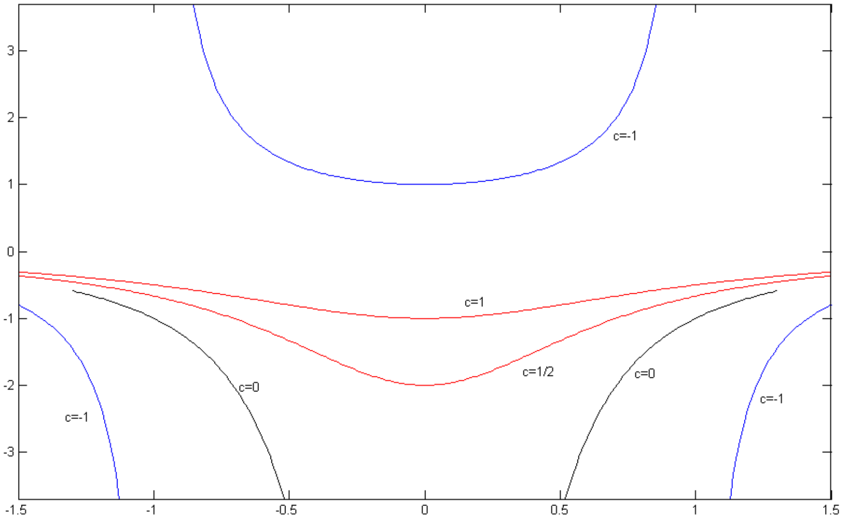
Ejemplo 1: $y' = 2xy^2$.
Definida en todo $\mathbb{R}^2$
$h(y) = y^2 = 0 \Rightarrow$ y(x)=0, $x \in \mathbb{R} \leftarrow$ solución constante.
Para $y \neq 0$:

$$\int \frac{1}{y^2} dy = 2 \int x dx + C \quad \Rightarrow \quad y = \frac{-1}{x^2 + C}$$

Como no existe un $C \in \mathbb{R}$ tq $y(x) = 0$, tal sol. es solución singular.

- Si $C > 0$ la ecuación nos da una función definida $\forall x$.
- Para $C = 0$, obtenemos 2 curvas definidas respectivamente para $x > 0$ y $x < 0$.
- Para cada $C < 0$ obtenemos 3 curvas. Una de estas es positiva, definida para $-\sqrt{-C} < x < \sqrt{-C}$, las otras 2 son negativas, definidas para $x < -\sqrt{-C}$ y $x > \sqrt{-C}$, resp.

Variables Separables (Gráfico ejm1)



Ejemplo 2: $y' = cos^2(y)$.
$\cos^2(y) = 0$ sii $y(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \leftarrow$ Soluciones constantes.
Sq $y(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$:

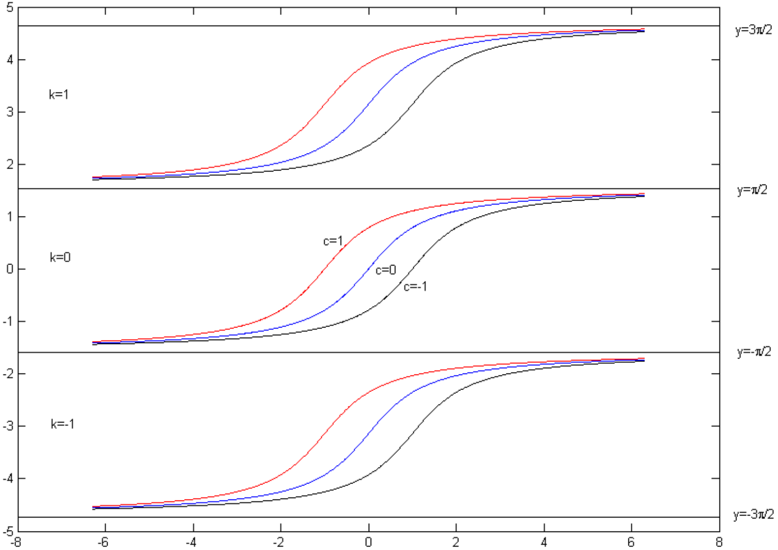
$$\int \frac{1}{\cos^2(y)} dy = \int dx + c \quad \Rightarrow \quad \tan(y) = x + c.$$

Para $y \in (-\pi/2, \pi/2)$: $y = \arctan(x + c)$.
Para lo demás valores de y, usar: $\tan(y) = \tan(y - k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$. Así

$$y = k\pi + \arctan(x + c), \quad c \in \mathbb{R},\ k \in \mathbb{Z}.$$

¿Son soluciones singulares las soluciones constantes? Si, ¿porque?

Variables Separables (Gráfico ejm2)



Ejemplo 3: $3e^x \tan(y)dx + (2 - e^x)\sec^2(y)dy = 0$.
Soluciones constantes: $\tan(y) = 0 \Leftrightarrow y = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$
Suponer que $\tan(y)(2 - e^x) \neq 0$:

$$\frac{3e^x}{2 - e^x}dx + \frac{\sec^2(y)}{\tan(y)}dy = 0 \Rightarrow -3\ln(|2 - e^x|) + \ln(|\tan(y)|) = c_1$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\left|\frac{\tan(y)}{(2 - e^x)^3}\right|\right) = c_1 \Leftrightarrow \frac{\tan(y)}{(2 - e^x)^3} = c\ (= \pm e^{c_1})$$

Las soluciones ctes son no singulares, ¿Porque?

Obs. $x = 2$ es solución (particular) de la E.D, pues basta tomar $c = \frac{1}{c_2}$ y luego $c_2 = 0$. **Ejercicios:** Solucionar
1) $y' = \frac{2x+2y}{y^2+1}$
2) $y' = 2x\sec(y),\ y \in (-\pi/2, \pi/2)$
3) $y(1 + y'^2) = k^2,\ k > 0$

Ejemplo: $y' = f(x, y) = \sqrt{|y|}$.

Sol. cte: $y = 0$ (definida en todo $\mathbb{R}$).
Si $y > 0$ (sol. positiva), entonces $y' = \sqrt{y}$. Para ver las otras soluciones, veamos si $z_1 = -y(x)$ y $z_2(x) = -y(-x)$ son soluciones de la EDO, con y sol. de la EDO.
Caso z_1:

$$z_1' = -y'(x) = -\sqrt{|y|} = -\sqrt{|-y|} = -\sqrt{|z_1|},$$

esto significa que z_1 no es sol.
Caso z_2:

$$z_2'(x) = y'(-x) = \sqrt{|y(-x)|} = \sqrt{|-y(-x)|} = \sqrt{|z(x)|}.$$

Por tanto, z_2 es sol. Así, solo es suficiente considerar las sol. positivas:

$$y' = \sqrt{y} \Rightarrow 2\sqrt{y} = x + c$$

de donde $y(x; c) = \frac{(x+c)^2}{4}$ en $(-c, \infty)$, $c \in \mathbb{R}$ da las sol. positivas. (Note que $\sqrt{y}$ es positivo, de donde $x > -c$).

Para el caso $x < -c$, esta fórmula no da una solución de le E.D.
Ahora, teniendo en cuenta lo anterior: $z(x) = -y(-x; c) = -\frac{(-x+c)^2}{4}$ dan las soluciones negativas, las cuales existen para $x < c$.

Obs.

- Las soluciones anteriores, a excepción de la sol. cte, no están definidas en todo $\mathbb{R}$.
- Pero estas pueden ser construidos juntando piezas de aquellas funciones:

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{4} & , \quad x > 0 \\ 0 & , \quad -2 \leq x \leq 0 \\ -\frac{(x+2)^2}{4} & , \quad x < -2 \end{cases}$$

El ejemplo anterior, es una solución de la EDO $y' = \sqrt{|y|}$ definida en todo $\mathbb{R}$.

Ejemplo: $y' = f(x,y) = -x\operatorname{sgn}(y)\sqrt{|y|}$.

Sol. cte: $y = 0$ (definida en todo $\mathbb{R}$).
Si $y > 0$ (sol. positiva), entonces $y' = \sqrt{y}$. Para ver las otras soluciones, veamos si $z_1 = -y(x)$ y $z_2(x) = -y(-x)$ son soluciones de la EDO, con y sol. de la EDO.

Caso z_1:

$$z_1' = -y' = x\operatorname{sgn}(y)\sqrt{|y|} = -x\operatorname{sgn}(-y)\sqrt{|-y|} = -x\operatorname{sgn}(z_1)\sqrt{|z_1|}.$$

Por tanto, z_1 es sol. de la EDO.

Caso z_2:

$$\begin{aligned} z_2' = y'(-x) &= -x\operatorname{sgn}(y(-x))\sqrt{|y(-x)|} = x\operatorname{sgn}(-y(-x))\sqrt{|-y(-x)|} \\ &= x\operatorname{sgn}(z_2)\sqrt{|z_2|}. \end{aligned}$$

Esto es, z_2 no es sol. de la EDO.
Por tanto es suficiente calcular las soluciones positivas:

$$y' = -x\sqrt{y} \Rightarrow \sqrt{y} = \frac{c - x^2}{4}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Ejemplos

De donde

$$y(x;c) = \frac{1}{16}(c - x^2)^2 \text{ para } x \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c}) \text{ con } c > 0.$$

Debido a que $y = 0$ es tb solución, se puede extender la solución

$$y(x;c) = 0 \text{ para } |x| \geq \sqrt{c},$$

con esto la sol. y estaría definida en todo $\mathbb{R}$.
La otra solución (negativa) viene dada por:

$$z(x;c) = -y(x;c) = \frac{1}{16}(c - x^2)^2 \text{ para } x \in (-\sqrt{c}, \sqrt{c}) \text{ con } c > 0.$$

También, se puede extender la solución

$$z(x;c) = 0 \text{ para } |x| \geq \sqrt{c},$$

con esto la sol. z estaría definida en todo $\mathbb{R}$.

1) Ecuaciones del tipo:

$$\frac{dy}{dx} = f(ax + by + c).$$

Cambio de variable: $z = ax + by + c$

$$z = ax + by + c \Rightarrow \frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}.$$

Así:

$$\frac{dz}{dx} = a + bf(z) \quad \leftarrow \text{variable separable.}$$

Ejemplos:

1) $y' - e^x e^y = -1$

2) $y' = 3y - x$