MA2002-3: CÁLCULO AVANZADO Y APLICACIONES
RESUMEN: FÓRMULA DE CAUCHY Y SUS CONSECUENCIAS

Teorema 1:

(Cauchy) Sea $f \in H(\Omega \setminus \{p\}) \cap \mathcal{C}(\Omega)$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{B(p, r)} \subseteq \Omega$. Entonces, para todo $z_0 \in B(p, r)$ se tiene la fórmula integral de Cauchy:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(p, r)} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

donde $\partial B(p, r)$ es la circunferencia de centro p y radio r , recorrida en sentido antihorario.

Teorema 2:

(Taylor) Sea $f \in H(\Omega \setminus \{p\}) \cap \mathcal{C}(\Omega)$. Sea $r > 0$ tal que $\overline{B(p, r)} \subseteq \Omega$. Entonces existe una sucesión $(c_k)_{k \geq 0} \subset \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - p)^k, \quad \forall z \in B(p, r)$$

y más aún

$$c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(p) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B(p, r)} \frac{f(w)}{(w - p)^{k+1}} dw$$

donde $\partial B(p, r)$ está parametrizado en sentido antihorario.

Teorema 3:

(Desigualdades de Cauchy) Sea Ω abierto, $f \in H(\Omega)$, $p \in \Omega$ y $r > 0$ tal que $\overline{B(p, r)} \subseteq \Omega$. Si definimos

$$M_r = \sup_{\partial B(p, r)} |f(z)|$$

entonces

$$|f^{(k)}(p)| \leq k! \frac{M_r}{r^k}, \quad \forall k \geq 0$$

Teorema 4:

(Teorema de Liouville) Si $f \in H(\mathbb{C})$ (entera) es una función acotada entonces f es constante en $\mathbb{C}$.

Corolario 1:

(D'Álembert) Si f es un polinomio no constante (a coeficientes en $\mathbb{C}$) entonces existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $f(z_0) = 0$. En consecuencia, todo polinomio de grado $n \geq 1$ tiene exactamente n raíces en $\mathbb{C}$.