Profesor Héctor Olivero Q.
Auxs: Sergio Araneda & Victor Verdugo


# MA2002-3: CÁLCULO AVANZADO Y APLICACIONES
# CLASE AUXILIAR 8: TEOREMA DE LOS RESIDUOS E INTEGRACIÓN

1. Sea $f(z) = \dfrac{g(z)}{h(z)}$, con $g$ y $h$ holomorfas en una vecindad de $p \in \mathbb{C}$. Suponga que $f$ tiene un polo en $p$, y que $g(p) \neq 0$, $h(p) = h'(p) = 0$ y $h''(p) \neq 0$. Verifique que $f$ tiene un polo de orden 2 en $p$ y pruebe que
$$\mathrm{Res}(f,p) = \frac{2g'(p)}{h''(p)} - \frac{2}{3}\frac{g'(p)h'''(p)}{h''(p)^2}$$

2. Considere $f : \mathbb{C}\backslash\{0, z_1, z_2\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z(z-z_1)^2(z-z_2)^2}$ y con $z_1, z_2 \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ complejos distintos.

   *a*) Identifique los polos de $f$ con sus respectivos órdenes. Pruebe que
   $$\mathrm{Res}(f,0) = \frac{1}{z_1^2 z_2^2}, \qquad \mathrm{Res}(f,z_1) = \frac{e^{iz_1}}{z_1(z_1-z_2)^2}\left(i - \frac{3z_1 - z_2}{z_1(z_1-z_2)}\right)$$

   *b*) Considere ahora que $z_1 = 1$ y $z_2 = -5$. Calcule:
   $$\oint_{\partial D(0,1/2)} f(z)dz \quad \text{y} \quad \oint_{\partial D(0,2)} f(z)dz$$

3. Sea $f \in H(\mathbb{C})$. Pruebe que si $\mathrm{Re}(f)$, $\mathrm{Im}(f)$ o $|f|$ es constante, entonces $f$ es constante.

4. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa, tal que $f''(z) = 2f(z) + 1$, $f(0) = 1$ y $f'(0) = 0$. Encuentre la serie de potencias de $f$ en torno a 0 y calcule su radio de convergencia.

5. Sea $f \in H(D(z_0, R))$.

   *a*) Pruebe que para todo $0 < r < R$ se tiene que
   $$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})d\theta$$

   *b*) Deduzca que para $0 < r < 1$ se tiene que
   $$\int_0^{2\pi} \log(1 + re^{i\theta})d\theta = 0$$

   *c*) Concluya que $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{sen} x)dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2$