MA2002-3: CÁLCULO AVANZADO Y APLICACIONES
CLASE AUXILIAR 7: FÓRMULA DE CAUCHY Y SUS CONSECUENCIAS

1. Suponga que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ tiene radio de convergencia $R > 0$. Muestre que:

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n z^n}{n!}$$

es entera y que para $0 < r < R$, existe una constante M tal que

$$|h(z)| \leq M e^{|z|/r}$$

2. A lo largo de esta pregunta f denotará una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$.

   a) Demuestre la siguiente equivalencia: Existe un natural $k \in \mathbb{N}$ y dos complejos a y b tales que $|f(z)| \leq a + b|z|^k$ para todo $z \in \mathbb{C}$ ssi f es un polinomio de grado k.
   Indicación: Utilice las desigualdades de Cauchy.

   b) Suponga que $f(z)/z \to 0$ cuando $|z| \to +\infty$.

      1) Demuestre que existen $a, b \in \mathbb{C}$ tales que $|f(z)| \leq a + b|z|,\ \forall z \in \mathbb{C}$. **Indicación:** Muestre que la función $g(z) = (f(z) - f(0))/z$ puede extenderse de manera holomorfa a todo $\mathbb{C}$.

      2) Utilice la parte anterior para concluir que f es necesariamente constante en todo $\mathbb{C}$.

3. Pruebe que $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp(2\alpha \cos\theta) d\theta$
   Indicación: Comience probando que

$$\left(\frac{\alpha^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{\alpha^n \exp(\alpha z)}{n! z^{n+1}} dz.$$

4. Sea $f \in H(\Omega \setminus \{0\}) \cap C(\Omega)$ con Ω un conjunto abierto conexo tal que $\overline{D(0,r)} \subseteq \Omega$ para algún $r > 0$. Suponga que existe una sucesión $(z_n)_{n \geq 0} \subseteq \Omega \setminus \{0\}$ tal que $z_n \to 0$ y $f(z_n) = 0$ para todo $n \geq 0$. Pruebe que $f \equiv 0$.

5. Sea f una función analítica en el disco $|z| < 1$ del plano complejo. Asuma que existe una constante positiva M tal que

$$\int_0^{2\pi} |f'(re^{i\theta})| d\theta \leq M, \qquad 0 < r < 1.$$

Probar que

$$\int_{[0,1)} |f(x)| dx < \infty.$$