Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Profesor Héctor Olivero Q.
Auxs: Sergio Araneda & Victor Verdugo
Semestre de Otoño 2011

MA2002-3: CÁLCULO AVANZADO Y APLICACIONES
CLASE AUXILIAR 6: CONTINUIDAD, DERIVACIÓN, SERIES DE POTENCIAS E INTEGRACIÓN EN EL PLANO COMPLEJO

1. Definamos los operadores diferenciales $\dfrac{\partial}{\partial z}$ y $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ mediante las fórmulas

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\\ \frac{\partial}{\partial \overline{z}} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\end{aligned}$$

   a) Pruebe que $f = u + iv$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann si y sólo si $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

   b) Si $f \in H(\Omega)$, muestre que $\forall z \in \Omega,\ f'(z) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z)$.

   c) Explicite en términos de u y v a qué corresponde la ecuación $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 0$.

   d) Dada una función $f = u + iv$ con u y v de clase C^2, se define el laplaciano de f mediante

$$\Delta f = \Delta u + i\Delta v,$$

   y si $\Delta f = 0$ en Ω entonces se dice que f es armónica en Ω. Deduzca que si $f \in H(\Omega)$ entonces f es armónica en Ω. Pruebe que $f \in H(\Omega)$ si y sólo si $f(z)$ y $zf(z)$ son armónicas en Ω.

2. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, con Ω abierto no vacío. Supongamos que en coordenadas cartesianas $z = x + iy,\ f(z) = \widehat{u}(x, y) + i\widehat{v}(x, y)$, y que en coordenadas polares $z = re^{i\theta},\ f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ con u y v diferenciables. Verifique que $u(r, \theta) = \widehat{u}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ y $v(r, \theta) = \widehat{v}(r\cos\theta, r\sin\theta)$, y pruebe que f es holomorfa en Ω si y sólo si

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} = \dfrac{\partial u}{\partial r}\\[2ex] \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} = -\dfrac{\partial v}{\partial r}\end{cases}$$

   Estas se conocen como las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares. Verifique que de tenerse estas condiciones entonces

$$f'(z) = \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right)e^{-i\theta},\ z = re^{i\theta}.$$

3. Encuentre el desarrollo en serie de potencias $\sum c_k z^k$ en torno a $z_0 = 0$, para la función
$$f(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$$
Pruebe además que c_k es la sucesión de Fibonacci $c_0 = c_1 = 1,\ c_{k+2} = c_{k+1} + c_k$.

4. *a*) Encuentre el dominio $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ donde la función
$$f(z) = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$
es holomorfa, y demuestre que $\tan(f(z)) = z$, es decir, $f(z) = \arctan(z)$.

   b) Calcule f' y determine su desarrollo en serie de potencias en torno a $z = 0$, explicitando el radio de convergencia. Deduzca el desarrollo en serie para f en torno a $z = 0$.

5. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa:

   a) Dado $\theta_0 \in (0, 2\pi)$, pruebe que si
$$\lim_{R \to +\infty} R \int_0^{\theta_0} |f(Re^{i\theta})| d\theta = 0$$
entonces se tiene que $e^{i\theta_0} \displaystyle\int_0^{+\infty} |f(e^{i\theta_0}x)| dx = \int_0^{+\infty} |f(x)| dx$.

   b) Pruebe que $f(z) = \exp(-z^2)$ satisface lo anterior para todo $\theta_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.

   c) Sabiendo que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$, calcule el valor de las siguientes integrales impropias:
$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos(x^2) dx \ , \ \int_0^{\infty} e^{-x^2} \sin(x^2) dx$$
.

Recuerde que $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$ y $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}$.