

MA2002: CÁLCULO AVANZADO Y APLICACIONES
EJERCICIO 1

De acuerdo a la teoría de Yukawa para las fuerzas nucleares, la fuerza de atracción entre un neutrón y un protón tiene como potencial $U(r) = Ke^{-\alpha r}/r$ (en coordenadas esféricas) para ciertas constantes $K < 0$ y $\alpha > 0$.

1. (1 pt.) Encuentre la fuerza $\vec{F} = -\nabla U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.
2. (1.5 pt.) Calcule directamente el flujo de \vec{F} a través de un casquete esférico de radio $r = a$, $a > 0$ orientado según la normal exterior.
3. (1.5 pt.) Pruebe que $\Delta U = \alpha^2 U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.
4. (2 pt.) Demuestre que si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto acotado que contiene al origen, cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por trozos y está orientada según la normal exterior, entonces

$$\int \int_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = 4\pi K - \alpha^2 \int \int \int_{\Omega} U dV.$$

¿Contradice esto el teorema de la divergencia de Gauss? Explique.

Indicación: Defina un conjunto Ω_a donde si pueda aplicar el teorema de Gauss. Además puede serle útil recordar que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{e^x} = 1.$$