Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Profesor Héctor Olivero Q.
Auxs: Sergio Araneda & Victor Verdugo
Semestre de Otoño 2011

MA2002-3: CÁLCULO AVANZADO Y APLICACIONES
CLASE AUXILIAR 3: TEOREMA DE GAUSS, TEOREMA DE STOKES Y FÓRMULAS DE GREEN

1. En lo que sigue denotemos $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \neq 0\}$.

   a) Sea $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + \rho\hat{k}$ (coordenadas cilíndricas). Sea S la porción del casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ que se encuentra fuera del cilindro $x^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{4}$. Bosqueje S y calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie S orientada según la normal exterior.

   b) Sea $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por $\vec{F} = \cos(\varphi)\hat{\theta}$ (coordenadas esféricas). Utilice el Teorema de Stokes para calcular el trabajo de $\vec{F}$ a lo largo de la curva que resulta de intersectar el casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ con el plano $x = 1$. Haga un bosquejo indicando la orientación de la curva y de la normal escogida.

2. Sean $\Omega \subset \Omega'$ dos abiertos acotados en $\mathbb{R}^3$. Suponga que $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos y sea $u \in C^2(\Omega, \mathbb{R})$ tal que

$$\begin{aligned} \Delta u &= f \qquad \text{en } \Omega \\ \nabla u \cdot \hat{n} &= g \qquad \text{sobre } \partial\Omega \end{aligned}$$

   donde $f, g \in C(\Omega', \mathbb{R})$ y $\hat{n}$ es la normal exterior a Ω. Pruebe que para todo $v \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$

$$\iiint_\Omega \nabla u \cdot \nabla v dV = \iint_{\partial\Omega} vg dA - \iiint_\Omega vf dV$$

   Muestre que si $f(x,y,z) = 1/x$ y $g \equiv 0$ entonces

$$\iiint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x} dV = -\mathrm{Vol}(\Omega),$$

   donde en este caso Ω no intersecta al plano YZ (de ecuación $x = 0$).

3. Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ una región abierta acotada del plano y con ∂D regular por pedazos. Sea $u : D \cup \partial D \to \mathbb{R}$, con $u \in \mathcal{C}^2(D)$ y $\vec{a} \in D$ un punto tal que $B_\rho = B(a, \rho) \subset D$, para todo $0 < \rho \leq R$. Se define:

$$I(\rho) = \frac{1}{\rho} \int_{\partial B_\rho} u ds$$

   a) Pruebe que $\lim\limits_{\rho \to 0} I(\rho) = 2\pi u(a)$.

b) Sea $\hat{n}$ la normal exterior a ∂B_ρ. Pruebe que:

$$\int_{\partial B_\rho} \nabla u \cdot \hat{n} ds = \iint_{B_\rho} \Delta u dA$$

c) Pruebe que $I'(\rho) = \dfrac{1}{\rho} \displaystyle\iint_{B_\rho} \Delta u dA$.

d) Suponga que u satisface la ecuación de Laplace en D, es decir, $\Delta u\big|_D \equiv 0$. Pruebe que:

$$u(a) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R} u ds$$

e) Bajo el mismo supuesto de la parte anterior, pruebe que:

$$u(a) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{B_R} u dA$$

4. Sea $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = \|\vec{r}\|$ y la superficie $\Sigma = \partial\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 : a \leq r \leq b\}$ orientada hacia el exterior. Sean $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ambas de clase $\mathcal{C}^1$ tales que:

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r^2)\vec{r}$$

a) Verificar que $r^2 \operatorname{div} \vec{F} = \dfrac{d}{dr}(r^3 f(r^2))$.

b) Concluya que $\displaystyle\iint_\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4\pi(b^3 f(b^2) - a^3 f(a^2))$.

c) Con la misma notación, sea C una curva de extremos $O = (0, 0, 0)$ y $A = (0, 0, a)$, regular por pedazos, recorrida desde O hasta A. Verificar que:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{a}} f(t) dt$$