Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Profesor Héctor Olivero Q.
Auxs: Sergio Araneda & Victor Verdugo
Semestre de Otoño 2011

MA2002-3: CÁLCULO AVANZADO Y APLICACIONES
CLASE AUXILIAR 2: TEOREMA DE GAUSS, INTEGRAL DE LÍNEA Y TEOREMA DE STOKES

1. Considere el campo en coordenadas esféricas dado por $\vec{F} = r^2\hat{r} + r\theta\sin^3\varphi\hat{\theta}$. Calcule $\operatorname{div}\vec{F}$ en todo punto del dominio de diferenciabilidad de $\vec{F}$, vale decir, $\mathbb{R}^3\setminus\{\text{Eje Z}\}$. Sea Ω la región de la esfera unitaria $x^2+y^2+z^2 \le 1$ que intersecta al cono infinito $z \ge \sqrt{x^2+y^2}$. Defina $\Omega(\varepsilon) = \{(x,y,z)\in\Omega:\ x^2+y^2 \ge \varepsilon^2\}$ para $\varepsilon > 0$ pequeño. Bosqueje $\Omega(\varepsilon)$ y encuentre el valor de $I = \lim_{\varepsilon\to 0}\iiint_{\Omega(\varepsilon)} \operatorname{div}\vec{F}dV$.

2. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto no vacío, $\vec{F}:\Omega\to\mathbb{R}^3$ un campo vectorial y $g:\Omega\to\mathbb{R}$ un campo escalar, ambos de clase C^1. Pruebe que si $S\cup\partial S\subset\Omega$, donde S es una superficie regular a pedazos, entonces se tiene la fórmula de integración por partes

$$\iint\limits_S g\,\mathrm{rot}(\vec{F})\cdot d\vec{A} = \oint\limits_{\partial S} g\vec{F}\cdot d\vec{r} - \iint\limits_S \nabla g\times\vec{F}\cdot d\vec{A},$$

siempre que las orientaciones de S y ∂S sean las adecuadas (explique). ¿Qué puede decir cuando además se tiene que el campo $\vec{F}$ es conservativo?.

3. Considere el campo $\vec{F} = r^3\hat{r} + e^{\psi\cosh(r)}\hat{\psi}$.

   a) Calcule $\operatorname{div}\vec{F}$.

   b) Calcule el flujo del campo $\vec{F}$ a través del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$, $z\le h$ (sin la tapa).

4. Dados dos campos escalares $f, g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$, pruebe que para toda curva simple cerrada y regular por pedazos Γ se tiene

$$\oint_\Gamma f\nabla g\cdot d\vec{r} + \oint_\Gamma g\nabla f\cdot d\vec{r} = 0$$

5. Considere el siguiente campo vectorial $\vec{F}(x,y,z) = \dfrac{x^2-y}{x^2+y^2}\hat{\imath} + \dfrac{x}{x^2+y^2-2y}\hat{\jmath}$:

   a) Indique el dominio de definición de $\vec{F}$ y pruebe que $\operatorname{rot}\vec{F} = \vec{0}$ en dicho dominio.

   b) Calcule la integral de trabajo $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ a lo largo de la circunferencia $x^2+y^2=1$, $z=2$ recorrida en sentido antihorario. ¿Contradice esto el teorema de Stokes? Explique.

c) Calcule el trabajo $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ a lo largo de cualquier curva simple regular C contenida en el plano $z = 0$ y que no pasa por el origen. Distinga según si la curva encierra o no el origen.