

MA2002-3: CÁLCULO AVANZADO Y APLICACIONES
CLASE AUXILIAR 1: ELEMENTOS DE CÁLCULO VECTORIAL, INTEGRAL
DE FLUJO Y TEOREMA DE GAUSS

1. Sean $\vec{F}, \vec{G} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y los campos escalares $f, g : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, todos suficientemente diferenciables. Pruebe las siguientes identidades vectoriales:

- a) $\text{div}(\text{rot } \vec{F}) = 0$
- b) $\text{div}(f\vec{F}) = f \text{div } \vec{F} + \vec{F} \cdot \nabla f$
- c) $\text{rot}(f\vec{F}) = f \text{rot } \vec{F} + \nabla f \times \vec{F}$
- d) $\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \text{rot } \vec{F} - \vec{F} \cdot \text{rot } \vec{G}$

2. Un campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ de clase $\mathcal{C}^1$ se dice *central* si es radial y depende solo de la distancia al origen, es decir, que puede escribirse en coordenadas esféricas como

$$\vec{F}(\vec{r}) = \varphi(r)\hat{r}$$

para alguna función $\varphi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^1$.

- a) Muestre que todo campo central $\vec{F}$ es irrotacional, es decir, $\text{rot } \vec{F} = 0$.
- b) Verifique que $\text{div } \vec{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(\varphi(r)r^2)$.
- c) Deduzca que un campo central es selenoidal en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ si y solo si

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{K}{r^2} \hat{r}$$

para alguna constante $K \in \mathbb{R}$.

- d) Concluya que todo campo central selenoidal admite un potencial de la forma $V(r) = \frac{K}{r} + C$, para ciertos $K, C \in \mathbb{R}$.

3. Considere el paraboloide $P \subset \mathbb{R}^3$ de ecuación $z = 1 + \rho^2$, $\rho \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$, en coordenadas cilíndricas.

- a) Bosqueje la superficie P .
- b) Considere la sección S de P que queda dentro del cilindro $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$. Encuentre una parametrización para S indicando su dominio de definición.
- c) Calcule el vector normal unitario a S y el elemento de superficie.
- d) Calcule la masa de S suponiendo densidad superficial de masa $f(\rho, \theta, z) = 1/\sqrt{1+4\rho^2}$.

4. Calcular el flujo del campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, z)$ a través del disco definido por las ecuaciones

$$x^2 + y^2 \leq 25, \quad z = 12,$$

y orientado según la normal superior $\hat{k}$.

5. Calcular el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = xz\hat{i} + \hat{k}$ a través del manto del paraboloide en coordenadas cilíndricas

$$z = 4 - \rho^2, \quad 0 \leq \rho \leq 2, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

orientado según la normal interior.

6. Considere el campo vectorial dado en coordenadas cilíndricas por

$$\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + e^{-\theta^2}\hat{k}$$

- Determine el dominio de diferenciabilidad de $\vec{F}$ y verifique que $\text{div } \vec{F} = 0$ sobre dicho dominio.
 - Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ la superficie dada por la porción del casquete esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra entre los planos $z = -1$ y $z = 1$ (sin considerar las tapas). Bosqueje Σ y calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de Σ orientada según la normal exterior a la esfera.
 - Interprete el resultado obtenido en (b).
7. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado con frontera $\partial\Omega$ regular por pedazos y orientada según la normal exterior. Consideremos un campo escalar $\phi \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U} \subseteq \Omega \cup \partial\Omega, \mathbb{R})$ armónico, es decir, $\Delta\phi = 0$ en Ω . Sea $\vec{p} \in \text{int}(\Omega)$ y definamos la función

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{\|\vec{r} - \vec{p}\|}$$

con $\vec{r} = (x, y, z)$.

- Calcule $\nabla\varphi(\vec{r})$ para $\vec{r} \neq \vec{p}$. Muestre que $\Delta\varphi = 0$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{p\}$.
- Sea $B(\vec{p}, \delta) \subseteq \Omega$ la esfera de centro $\vec{p}$ y radio $\delta > 0$, contenida en Ω . Pruebe que

$$\iint_{\partial\Omega} (\phi \nabla\varphi - \varphi \nabla\phi) \cdot d\vec{S} = \iint_{\partial B(\vec{p}, \delta)} (\phi \nabla\varphi - \varphi \nabla\phi) \cdot d\vec{S}$$