Auxiliar Extra Examen - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 01 de Septiembre, 2011

Profesor Cátedra: Jaime H. Ortega
Profesores Auxiliares: Benjamín Obando Vallejos - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto conexo por caminos de frontera regular $\partial\Omega = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. Considere la ecuación del calor en régimen estacionario con condiciones de borde mixtas:

$$(ECM)\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } \Omega \\ u = T_0 & \text{sobre } \Sigma_1 \\ \frac{\partial u}{\partial \hat{n}} = -\alpha u & \text{sobre } \Sigma_2 \end{cases}$$

donde $\alpha > 0$ y $T_0 \geq 0$ son constantes conocidas.

a) Pruebe que en el caso $T_0 = 0$ se tiene $u \equiv 0$ en todo Ω.
Indicación: Pruebe que en este caso se tiene:

$$\iiint_\Omega ||\nabla u||^2 dV + \alpha \iint_{\Sigma_2} u^2 dA = 0$$

b) Deduzca que la ecuación (ECM) posee a lo más una solución.

Pregunta 2. Sea $\vec{r}$ el campo vectorial definido por $\vec{r}(x,y,z) = (x,y,z)$. Dada una superficie regular S y un vector fijo $\vec{v}_0 \in \mathbb{R}^3$, demuestre que:

$$\iint_S \vec{v}_0 \cdot d\vec{A} = \begin{cases} \frac{1}{2}\int_{\partial S} (\vec{v}_0 \times \vec{r}) \cdot d\vec{r} & \text{si } S \text{ tiene borde } \partial S \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } S \text{ es una superficie cerrada} \end{cases}$$

Pregunta 3. Sea $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, donde $\Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2 \neq 0\}$, el campo vectorial dado por $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\rho} + \rho\hat{k}$ (en coordenadas cilíndricas). Sea S la porción del casquete esférico $x^2+y^2+z^2 = a^2$ que se encuentra fuera del cilíndro $x^2+y^2 \leq a^2/4$. Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través de la superficie de S orientada según la normal exterior.

Pregunta 4. Pruebe que la divergencia del rotor de un campo cualquiera siempre es 0, independiente del sistema de coordenadas utilizado.
Indicación: Considere dos superficies cuyo borde sea la misma curva (piense en una esfera, por ejemplo). Use el Teorema de Gauss y de Stokes de forma apropiada y concluya.

Pregunta 5.

a) Sean $\phi, \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dos funciones de clase $\mathcal{C}^2$. Sea S una superficie orientable y $C = \partial S$ su borde geométrico, ambos orientados en forma consistente. Muestre que:

$$\iint_S \nabla\phi \times \nabla\psi \cdot d\vec{S} = \oint_C \phi\nabla\psi \cdot d\vec{r}$$

b) Considere la curva regular por trozos $\Gamma = \cup_{i=1}^4 \Gamma_i$, donde Γ_1 es el segmento de recta que une los puntos $(1,0,2)$ y $(1,0,0)$, $\Gamma_2 = \{(x,y,0) : \ x^2+y^2 = 1, y \geq 0\}$, Γ_3 es el segmento de recta que une los puntos $(-1,0,0)$ y $(-1,0,2)$ y $\Gamma_2 = \{(x,y,2) : \ x^2+y^2 = 1, y \geq 0\}$. Bosqueje la curva Γ, además, calcule $\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$, donde el campo $\vec{F}$ en coordenadas cilíndricas está dado por:

$$\vec{F} = \rho^4 \sin\theta\hat{\rho} + \rho^4\cos\theta\hat{\theta} + \rho\theta\hat{k}$$

c) Sea S el hemisferio superior de la esfera $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$ y $\vec{F}$ el campo vectorial definido por:

$$\vec{F}(x,y,z) = (\sin(x)\cdot z - y^3, \cos(y)\cdot z + x^3, \cos(xy))$$

Calcule $\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot d\vec{S}$

Pregunta 6. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto conexo por caminos de frontera regular. Sea $u \in \mathcal{C}^1([0,T] \times \overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2((0,T) \times \Omega)$ tal que satisface la ecuación del calor:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u = 0 & \text{en } (0,T) \times \Omega \\ u = 0 & \text{en } (0,T) \times \partial\Omega \\ u(0,x) = u_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

Deseamos probar que la solución de esta ecuación es única. Para ello defina:

$$E(t) = \int_\Omega u^2(t,x)dx$$

pruebe que:

$$\frac{d}{dt}E(t) = -2\int_\Omega |\nabla u(t,x)|^2 dx \leq 0$$

Deduzca que si $u_0 \equiv 0$ entonces $u(t,x) = 0$ y concluya.