P4 (1)

$$\begin{cases} \Delta u + u = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 2 \\ u(x,0) = u(0,y) = u(1,y) = 0 \\ u(x,2) = x(1-x) \end{cases}$$

Obs. A priori no decidiremos que extensión utilizar (par / impar), lo haremos solo cuando sea necesario.

Sol. Buscamos soluciones de la forma $U(x,y) = X(x)Y(y)$

$\Delta u + u = 0 \iff u_{xx} + u_{yy} + u = 0 \iff X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) + X(x)Y(y) = 0$

multip por $\frac{1}{X(x)Y(y)}$: $\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + 1 = 0$

$\Rightarrow \frac{X''(x)}{X(x)} + 1 = \frac{-Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$ cte. $\Rightarrow$ $\begin{array}{l} X''(x) + (1-\lambda)X(x) = 0 \\ Y''(y) + \lambda Y(y) = 0. \end{array}$ (EDO's)

Recordemos que en gral una EDO del tipo $f'' + \alpha f = 0$ tiene soluciones $f(x) = C_1 e^{\sqrt{-\alpha}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{-\alpha}\,x}$. dep. de α las ctes sean reales o complejas.

así, En nuestro caso:

$X(x) = Ce^{\sqrt{\lambda-1}\,x} + De^{-\sqrt{\lambda-1}\,x}$ $\quad Y(y) = Ae^{\sqrt{-\lambda}\,y} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\,y}$

$\boxed{\text{Si } \lambda = 0}$ $\Rightarrow Y(y) = Ay + B$ (pues $Y''(y) = 0$) $\wedge$ $X(x) = C\,\text{sen}(x) + D\cos(x)$

Como (por CI) $u(x,0) = 0 = (C\,\text{sen}(x) + D\cos(x))\cdot B$ $\forall x$.

$\Rightarrow B \equiv 0$ pero esto $\Rightarrow u(x,y) = 0$. $\lambda = 0$ da solo sol. nula.

Si $\lambda > 0$ también se obtiene sol. nula (verificar).

$\boxed{\lambda < 0} \Rightarrow \lambda = -k^2 \Rightarrow \lambda - 1 = -k^2 - 1 = -(k^2+1) \Rightarrow \boxed{\sqrt{\lambda-1} = i\sqrt{k^2+1} = i\mu}$.

$\boxed{\sqrt{\lambda} = ik} \wedge \boxed{\sqrt{-\lambda} = k}$

así, $X(x) = Ce^{\sqrt{\lambda-1}\,x} + De^{-\sqrt{\lambda-1}\,x} = Ce^{i\mu x} + De^{-i\mu x}$

$\wedge$ $Y(y) = Ae^{\sqrt{-\lambda}\, y} + Be^{-\sqrt{-\lambda}\, y} = Ae^{ky} + Be^{-ky}$ ②

impongamos las cond. iniciales:

$u(x,0) = u(0,y) = u(1,y) = 0$.

$u(x,0) = X(x)\,Y(0) = \left(Ce^{i\mu x} + De^{-i\mu x}\right)\cdot (A+B) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$.

$\Rightarrow \boxed{A = -B}$

$\therefore\ Y(y) = A\left(e^{ky} - e^{-ky}\right) = 2A\left(\frac{e^{ky} - e^{-ky}}{2}\right) = \underbrace{2A}_{\tilde{A}} \sinh(ky) = \tilde{A}\sinh(ky)$

$u(0,y) = X(0)\cdot Y(y) = (C+D)\,Y(y) = 0 \quad \forall y \Rightarrow \boxed{C = -D}$

$\therefore\ X(x) = C\left(e^{i\mu x} - e^{-i\mu x}\right) = 2iC\left(\frac{e^{i\mu x} - e^{-i\mu x}}{2i}\right) = \underbrace{2iC}_{\tilde{C}} \operatorname{sen}(\mu x) = \tilde{C}\operatorname{sen}(\mu x)$

$u(1,y) = 0 \Rightarrow X(1)\,Y(y) = 0 \Leftrightarrow \tilde{C}\operatorname{sen}(\mu\cdot 1)\cdot \tilde{A}\sinh(ky) = 0$

$\Rightarrow \sin(\mu) = 0 \Rightarrow \boxed{\underbrace{\mu}_{\sqrt{k^2+1}} = n\pi} \quad n \in \mathbb{Z}$

(sol no nulas $\Rightarrow \tilde{C}, \tilde{D} \neq 0$)

$\Rightarrow k^2 + 1 = n^2\pi^2$.

$\Rightarrow \boxed{k = \sqrt{n^2\pi^2 - 1} \quad n \in \mathbb{N}}$

así $u_n(x,y) = C_n \operatorname{sen}(n\pi x)\cdot \sinh\left(\sqrt{n^2\pi^2 - 1}\, y\right)$

es sol, $\forall n \in \mathbb{N}$

(Esto da una familia de soluciones)

Por superpos: $u(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,y) = \sum_{n}^{\infty} C_n \operatorname{sen}(n\pi x)\sinh\left(\sqrt{n^2\pi^2 - 1}\, y\right)$ es la sol.

Para determinar C_n: Usemos la ultima condición: $u(x,2) = x(1-x)$

$\Rightarrow u(x,2) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \operatorname{sen}(n\pi x)\sinh\left(\sqrt{n^2\pi^2 - 1}\, y\right) = x(1-x)$

ie. $C_n \cdot \sinh\left(\sqrt{n^2\pi^2 - 1}\; 2\right)$ es igual a los coef. de la serie de Fourier de senos de $x(1-x)$

Es en ESTE punto donde decidimos extender el problema de forma impar (pues en esta condición lo necesitamos!)

así, $C_n \cdot \sinh\left(\sqrt{n^2\pi^2 - 1}\; 2\right) = b_n = \int_{-1}^{1} x(1-x)\operatorname{sen}(n\pi x)\,dx$ ← coef. de la serie de senos de $x(1-x)$ con $x(1-x)$ ext. impar

$\therefore\ C_n = \frac{1}{\sinh\left(\sqrt{n^2\pi^2 - 1}\cdot 2\right)} \int_{-1}^{1} x(1-x)\sin(\pi n x)\,dx$ (Calculando!) y se tiene la sol completa.