Auxiliar 13 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Lunes 13 de Junio, 2011

Profesor Cátedra: Jaime H. Ortega
Profesores Auxiliares: Benjamín Obando Vallejos - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Considere la función $f : [-\pi, \pi] \to (-\pi, \pi)$ dada por:

$$f(x) \begin{cases} -\pi & -\pi < x < 0 \\ x & 0 < x < \pi \end{cases}$$

a) Determine la serie de Fourier de f en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Grafique.

b) Deduzca que:

$$\sum_{k \geq 1} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Hint: Evalúe la serie en un punto apropiado

Pregunta 2. Consideremos la función $f(x) = \cos(x)$ con $x \in (0, \pi)$. Pruebe que la serie de Fourier de senos de esta función es:

$$S_f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi} \left(\frac{n}{4n^2 - 1} \right) \sin 2nx$$

¿Para que valores puede asegurar que $f(x) = S_f(x)$?
Deduzca finalmente que:

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{16} = \frac{1}{2^2 - 1} - \frac{3}{6^2 - 1} + \frac{5}{10^2 - 1} - \frac{7}{14^2 - 1} + \cdots$$

Pregunta 3. Encuentre el desarrollo en Serie de Fourier de la función:

$$fx) = \cos(\alpha x), \quad -\pi < x < \pi$$

Para cualquier α no entero.
Concluya que:

$$\cot(\alpha\pi) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha} - \sum_{n \geq 1} \frac{2\alpha}{n^2 - \alpha^2} \right)$$

si α no es entero. Explique.

Pregunta 4. Sea $f \in \mathcal{C}^1$, 2π-periódica, tal que: $\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$.

a) Pruebe la identidad de Parseval, esto es:

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)dx = \pi \sum_{n \geq 1} (a_n^2 + b_n^2)$$

Indicación: Escriba $f^2(x) = f(x) \cdot f(x)$ de forma apropiada.

b) Deduzca que:

$$\int_0^{2\pi} f'^2(x)dx = \pi \sum_{n \geq 1} n^2 (a_n^2 + b_n^2)$$

c) Concluya la desigualdad de Wirtinger: Si f cumple las condiciones dadas en el enunciado, entonces:

$$\int_0^{2\pi} f'^2(x)dx \geq \int_0^{2\pi} f^2(x)dx$$

Además pruebe que la igualdad se obtiene si y solo si: $f(x) = a\cos(nx) + b\sin(nx)$