P1

a) $$\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} + i\frac{\partial(u+iv)}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} + i\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\underbrace{\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}}_{=0}\right) + i\left(\underbrace{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}}_{=0}\right)\right)$$ solo si $f \in H(\Omega)$.

b) $f \in H(\Omega)$ Pdq $\forall z \in \Omega$ $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$.

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial(u+iv)}{\partial x} - i\frac{\partial(u+iv)}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - i\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)}_{\frac{1}{2}f'} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{\frac{1}{2}f'} = f' \quad \checkmark$$

c) $$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial f}{\partial \bar z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{2}\left[\underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{U} + i\underbrace{\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)}_{V}\right]\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(U + iV\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}(U+iV) - i\frac{\partial}{\partial y}(U+iV)\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x} - i\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + i\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}} + \cancel{\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \cancel{\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}} - \cancel{\frac{\partial u}{\partial y \partial x}} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\Delta u + i\Delta v\right) \quad \left(= 0 \Rightarrow \Delta f = 0\right)$$

P2 a) Queremos determinar el cjto. A de los $z \in \mathbb{C}$ tal que

$$f(z) = z - i|z|^2 + Re(z)(Im(z))^2 \quad \text{es holomorfa.}$$

Sol. Notar que el alg. de fn. hol. no se aplica a nuestro caso pues $|\cdot|$, $Re(\cdot)$ ∧ $Im(\cdot)$ NO son funciones holomorfas.

Recordemos que

[• f es holomorfa en Ω abierto si f es derivable $\forall z_0 \in \Omega$.
y f es deriv. en $z_0 \in \Omega$ ssi es frechet-derivable en (x_0, y_0) como fn de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
y se satisf. (C-R) ie. si $f = u + iv \Rightarrow \partial_x u = \partial_y v \wedge \partial_y u = -\partial_x v$.]

Así pues, lo que haremos será ver en cuales puntos se satisfacen las condiciones de (C-R). Si estas no definen un conjunto abierto (ser holomorfo se define en conjuntos abiertos!) entonces $A = \phi$.

Para verificar las cond. de C-R. Escribamos f en funcion de $u(x,y)$ y $v(x,y)$

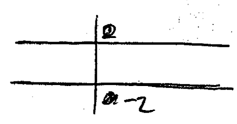
ie. $f(x+iy) = x+iy - i|x+iy|^2 + Re(x+iy)(Im(x+iy))^2$

$$= x+iy - i(\sqrt{x^2+y^2})^2 + x \cdot y^2 = x + xy^2 + i(y - (x^2+y^2))$$
$$= \underbrace{x+xy^2}_{u} + i\underbrace{(y-x^2-y^2)}_{v}$$

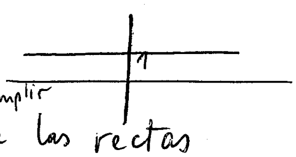
$\therefore$ $u(x,y) = x + xy^2$
$v(x,y) = y - x^2 - y^2$.

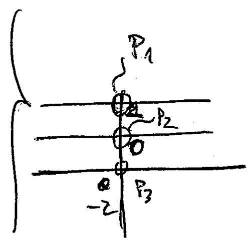
Veamos las condiciones: $\frac{\partial u}{\partial x} = 1 + y^2$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy$ $\quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2x$ $\quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1 - 2y$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Leftrightarrow \cancel{1}+y^2 = \cancel{1}-2y \Rightarrow y(y+2) = 0 \Rightarrow y = 0 \vee y = -2 & (1) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Leftrightarrow 2xy = +2x \Rightarrow \cancel{2}x(1-y) = 0 \Rightarrow x = 0 \vee y = 1 & (2) \end{cases}$$



Luego (1) son los puntos de las rectas $y=0$ e $y=-2$
(2) " " " " " " $x=0$ e ~~$y=1$~~ no se puede cumplir





Para cumplir ambas, hay que ver la intersección de las rectas que gráficamente son los puntos $P_2 = (0,0) = 0$ $\quad P_3 = (0,-2) = -2i$

Como (CR) se cumple solo en 3 puntos (los que NO definen un cto. abto)

$\Rightarrow A = \phi$. $\square$

b) $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ holomorfa. (en $D(0,1)$)

$f = u + iv$. $u = v^2$. Veamos que f es constante en $D(0,1)$.

Sol. Para ello basta ver que $u \wedge v$ son constantes

Como $f \in H(D(0,1)) \Rightarrow$ cumple (CR)

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ \text{y} \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{pero } u = v^2 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = 2v\frac{\partial v}{\partial x} \wedge \frac{\partial u}{\partial y} = 2v\frac{\partial v}{\partial y}} \ (*)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial (v^2)}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \ \text{y} \ \frac{\partial (v^2)}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \underbrace{\boxed{2v\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}}}_{(1)} \wedge \underbrace{\boxed{2v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}}_{(2)}$$

$\Rightarrow$ reemplazando (2) en (1)

$$2v\left(-2v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\Rightarrow -4v^2\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y}\underbrace{(1+4v^2)}_{>0} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial v}{\partial y} = 0}$$

Por (CR) $\frac{\partial v}{\partial y} = 0 = +\frac{\partial u}{\partial x} \Rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = 0}$

reemplazando (1) en (2) $\Rightarrow (1+4v^2)\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \overset{(CR)}{=} -\frac{\partial u}{\partial y}}$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \underset{\substack{D(0,1) \\ \text{es conexo}}}{\Rightarrow} u = cte_1 \wedge v = cte_2$$

$\therefore f = C_1 + iC_2 = cte$ en $D(0,1)$ $\square$

c) $f \in H(\Omega)$ $f = u + iv$. Pdq $\Delta u = \Delta v = 0$.

Como $f \in H(\Omega) \Rightarrow$ cumple (CR) en $\Omega \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} \overset{\text{Schwarz}}{=} -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = 0 = \Delta u$$, análogo para v. $\square$

P3 | a) $\displaystyle\oint_{\partial D(0,3)} \frac{\operatorname{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}\,dz$

F. Cauchy: $f(z_0) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\oint_{\Gamma} \frac{f(w)}{w-z_0}\,dw$ Γ ~~cont.~~ rodeando a z_0.
usualmente $\Gamma = \partial D(p,r)$. tq $D(p,r) \subseteq \Omega$
y f holom en Ω. ← ojo!

problema: si no descompongo en frac. parciales no me queda fn. cont. en el área encerrada! no puedo aplicar Teo directamente.

Notar que: $\dfrac{\operatorname{sen}\pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{f(z)+g(z)}{(z-1)(z-2)} =$

$= \dfrac{f(z)}{(z-1)(z-2)} + \dfrac{g(z)}{(z-1)(z-2)} = \dfrac{f(z)}{(z-2)} - \dfrac{f(z)}{(z-1)} + \dfrac{g(z)}{(z-2)} - \dfrac{g(z)}{(z-1)}$

así, $\displaystyle\oint_{\partial D(0,3)} \frac{\operatorname{sen}\pi z^2 + \cos\pi z^2}{(z-1)(z-2)}dz = \oint_{\partial D(0,3)} \frac{\operatorname{sen}\pi z^2}{z-2}dz - \oint_{\partial D(0,3)} \frac{\operatorname{sen}\pi z^2}{z-1} + \oint \frac{\cos\pi z^2}{z-2}dz - \oint \frac{\cos\pi z^2}{z-1}$

$\overset{FIC}{=} 2\pi i \cdot \underbrace{\cancel{\cos}\operatorname{sen}(\pi\cdot 2^2)}_{\operatorname{sen}(4\pi)} - \operatorname{sen}(\pi)\cdot 2\pi i + 2\pi i\left(\cos(4\pi) - \cos\pi\right) = 0.$

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}\,d\theta$. rec. que: $\displaystyle\oint_{\partial D(0,1)} f(z)\,dz \underset{\downarrow}{=} \int_0^{2\pi} f(e^{it})\cdot ie^{it}\,dt$.
$\gamma(t) = e^{it}$ $t\in[0,2\pi]$

$\Rightarrow \displaystyle\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{i\theta}}}{ie^{i\theta}}\cdot ie^{i\theta}\,d\theta = \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{i\theta}}}{e^{i\theta}}\cdot ie^{i\theta}\,d\theta = \frac{1}{i}\oint_{\partial D(0,1)} \frac{\overset{f}{e^z}}{z}\,dz \overset{FIC}{=} \frac{2\pi i\, e^0}{i} = 2\pi$ //

c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta} - i\theta}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{e^{e^{i\theta}}}{e^{i\theta}}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \cdots = \frac{1}{i}\oint_{\partial D(0,1)} \frac{e^z}{z^2}\,dz \overset{FIC}{=} \frac{2\pi i}{i}\cdot (e^z)'\Big|_{z=0}$

$= \dfrac{2\pi \cancel{i}}{\cancel{i}} = 2\pi$ //

P4 a) Antes de hacer los cálculos recordemos la fórmula de Cauchy en general (con derivadas)

Si $D(p,r) \subset \Omega$, $f \in H(\Omega)$

$$\underbrace{f^{(k)}}_{\leftarrow k\text{-ésima derivada}}(p) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(w)}{(w-p)^{k+1}}\,dw$$

así, en nuestro caso:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\underbrace{|z|=1}_{\partial D(0,1)}} \left(2 \pm \left(z + \frac{1}{z}\right)\right) \frac{f(z)}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{2 f(z)}{z}dz \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} f(z)\,dz \pm \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{z^2}\,dz$$

La primera integral: $$2 \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\underbrace{|z|=1}_{\partial D(0,1)}} \frac{f(z)}{(z-0)}\,dz \overset{\text{Formula de Cauchy con } p=0}{=} 2 \cdot f(0) = 2 \cdot 1 = 2$$

La segunda integral: $$\frac{1}{2\pi i} \int_{\underbrace{|z|=1}_{\text{camino cerrado}}} \underbrace{f(z)\,dz}_{\text{holomorfa}} = 0 \quad \text{por Cauchy-Goursat}$$

La tercera integral: $$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(z)}{(z-0)^2}\,dz \underset{\substack{\text{Formula}\\ \text{de Cauchy}\\ \text{con } k=1}}{=} f'(0)$$

Juntando todo: $$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \left(2 \pm \left(z + \frac{1}{z}\right)\right) \frac{f(z)}{z}\,dz = 2 \pm f'(0) \qquad (*)$$

Por otra parte: $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow \gamma'(\theta) = ie^{i\theta}$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \left(2 \pm \left(z + \frac{1}{z}\right)\right) \frac{f(z)}{z}\,dz = \frac{1}{2\pi \cancel{i}} \int_0^{2\pi} \left(2 \pm \left(e^{i\theta} + \frac{1}{e^{i\theta}}\right)\right) \frac{f(e^{i\theta})}{\cancel{e^{i\theta}}} \cdot \cancel{ie^{i\theta}}\,d\theta$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(1 \pm \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)\right) f(e^{i\theta})\,d\theta \overset{(*)}{=} 2 \pm f'(0)$$

pero: $1 \pm \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta})$

$\to 1 + \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = 1 + \cos\theta = 2\cos^2(\theta/2)$

$\to 1 - \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = 1 - \cos\theta = 2\,\text{sen}^2(\theta/2)$

y se concluye reemplazando.

b) Llamemos (1) a la integral con cos. y (2) a la otra.

Notemos que: $(1)+(2) = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\Big(\underbrace{\cos^2\frac{\theta}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}_{1}\Big)\,d\theta = 2+f'(0)+2-f'(0) = 4.$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,d\theta = 2\pi.}$$

ahora, consid:

$$(1)-(2) = \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\Big(\underbrace{\cos^2\frac{\theta}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}}_{\cos\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right)=\cos(\theta)}\Big)\,d\theta = 2+f'(0)-2+f'(0) = 2f'(0)$$

$$\therefore\ f'(0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos\theta\,d\theta.$$

$|\operatorname{Re} f| \leq |f|.$

$$\Rightarrow |\operatorname{Re} f'(0)| = \frac{1}{\pi}\left|\operatorname{Re}\left(\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos\theta\,d\theta\right)\right| \leq \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi}(f(e^{i\theta}))\cos\theta\,d\theta\right|$$

$$\leq \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,\underbrace{|\cos\theta|}_{\leq 1}\,d\theta\right| \leq \frac{1}{\pi}\left|\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\,d\theta\right| = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \ \checkmark$$

P5 a) $f(z) = \dfrac{(z^2-4)(z-1)^4}{(\sin \pi z)^4} = \dfrac{(z-2)(z+2)(z-1)^4}{(\sin \pi z)^4}$.

Recordemos primero un poco de terminología:

- $p \in \mathbb{C}$ es un punto singular aislado de $f(z)$ si $\exists R>0$ tq $f \in H(D(p,R)\setminus\{p\})$ pero f no es holomorfa en p.
- Se dice que p es pto. sing. evitable de f si es pto. sing. aislado y: $\lim_{z\to p} f(z)\ \exists$.
- Se dice que p es polo de f, si p es punto sing. aislado y además $\exists\, m \geq 1$ tq:

$$\lim_{z\to p} (z-p)^m f(z) \ \exists \text{ y es no nulo}$$

El menor $m \geq 1$ que cumple esto se denomina orden del polo

---

En nuestro caso (y tal como dice el enunciado) obviamente los puntos $(\mathbb{Z}=)\,0, \pm1, \pm2 \dots$ etc. son singularidades aisladas de f. Veamos a que corresponde cada punto.

Sigamos el hint: $\lim_{z\to n} \dfrac{\sin \pi z}{z-n} \overset{\text{forma } 0/0 \to \text{L'Hopital}}{=} \lim_{z\to n} \dfrac{\pi \cos \pi z}{1} = \pi \cdot (-1)^n$ $(\neq 0\ \forall n!)$

Separemos el estudio de las singularidades en 3 casos:

Caso 1: $n \in \mathbb{Z} \setminus \{2,-2,1\}$

Veamos el m tal que $\lim_{z\to n} (z-n)^m f(z)\ \exists$ (y si $m>0$ entonces pedimos que sea $\neq 0$)

$$\lim_{z\to n} (z-n)^m \frac{(z-2)(z+2)(z-1)^4}{(\sin \pi z)^4} = (n-2)(n+2)(n-1)^4 \cdot \lim_{z\to n} \frac{(z-n)^m}{(\sin \pi z)^4}$$

del límite visto antes, si $m=4 \Rightarrow \lim_{z\to n} \dfrac{(z-n)^4}{(\sin \pi z)^4} = \cancel{\pi}\cdot \dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{(-1)^4} = \dfrac{1}{\pi} \neq 0$

$$m<4 \Rightarrow \lim_{z\to n} \frac{(z-n)^m}{(\sin \pi z)^4}\ \nexists$$

$$m>4 \Rightarrow \lim_{z\to n} \frac{(z-n)^m}{(\sin \pi z)^4} = \underbrace{\lim_{z\to n} \frac{(z-n)^4}{(\sin \pi z)^4}}_{1/\pi} \cdot \lim (z-n)^{\overset{>0}{m-4}} = \frac{1}{\pi}\cdot 0 = 0$$

$\therefore$ Si $n \in \mathbb{Z}\setminus\{2,-2,1\} \Rightarrow n$ es polo de orden 4.

Caso 2: Si $n \in \{2,-2\}$ (Veamos spg el caso $n=2$)

buscamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $\lim_{z\to 2} (z-2)^m \cdot \frac{(z-2)(z+2)(z-1)^4}{(\sin \pi z)^4}$ $\exists$ (y si $m>0$ $\Rightarrow$ ~~el~~ quiero que el lim sea $\neq 0$)

$$= \lim_{z\to 2} \frac{(z-2)^{m+1}\cdot (z+2)(z-1)^4}{(\sin \pi z)^4} = 4\cdot 3^4 \cdot \lim_{z\to 2} \frac{(z-2)^{m+1}}{(\sin \pi z)^4}.$$

La existencia de este último límite, se verifica igual que antes, en este caso se tiene que $m = 3$

$\therefore$ 2 y -2 son polos de orden 3.

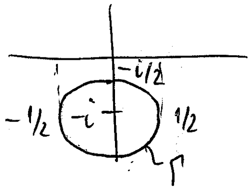
- Finalmente, el caso $n = 1$. Basta ver que:

$$\lim_{z\to 1} (z-2)(z+2)\frac{(z-1)^4}{(\sin \pi z)^4} = (-1)(3)\underbrace{\lim_{z\to 1}\frac{(z-1)^4}{(\sin \pi z)^4}}_{\frac{1}{\pi}(-1)} \neq 0 \text{ y existe!}$$

$\therefore$ $n=1$ es singularidad evitable/removible

$\therefore$ $n \in \mathbb{Z}\setminus\{2,-2,1\}$ Polo de orden 4, $n = 1$: ~~polo~~ sing. evitable
$n \in \{2,-2\}$ polo orden 3.

b) $\displaystyle\oint_{|z+i|=1/2} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\,dz$ región



Veamos los polos de $\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}$ como e^{iz} no se anula los polos son los ptos donde $z^2+1=0 \Rightarrow z^2=-1 \Rightarrow z_1 = i$ $z_2=-i$ Solo este importa

- Notar que por fact. del pol. son de orden 2

en efecto: $\displaystyle\lim_{z\to -i} \cancel{(z+i)^2}\frac{e^{iz}}{\cancel{(z+i)^2}(z-i)^2} = \frac{e^{i(-i)}}{(-i-i)^2} = \frac{e^1}{4i^2} = -\frac{e^1}{4} \neq 0$ ✓

Por el Teo. de los residuos

$$\oint_{|z+i|=1/2} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\,dz = 2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}, -i\right)$$

(el otro polo no va pues no está encerrado por Γ)

Para calcular el polo recordemos la fórmula general para un polo p de orden m

$$\operatorname{Res}(f,p) = \lim_{z\to p} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left((z-p)^m f(z)\right)$$

En nuestro caso $p=-i$, $m=2$

$$\therefore \operatorname{Res}(f,p) = \lim_{z\to -i} \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{2-1}}{dz^{2-1}}\left((z+i)^2 \frac{e^{iz}}{(z+i)^2(z-i)^2}\right)$$

$$= \lim_{z\to -i} \frac{d}{dz}\left(\frac{e^{iz}}{(z-i)^2}\right) = \lim_{z\to -i} \frac{ie^{iz}(z-i)^2 - 2(z-i)e^{iz}}{(z-i)^4}$$

$$= \frac{ie^{i(-i)}(-i-i)^2 + 2 2i e^{i(-i)}}{(-i-i)^4} = \frac{e^1 \cdot i(-2i)^2 + 4ie^1}{(-2i)^4}$$

$$= \frac{e^1\cdot i\cdot -4 + 4ie^1}{(-2i)^4} = \frac{0}{(-2i)^4} = 0.$$

Obs. ¡Cuando el polo es de orden >1 puede dar residuo $=0$! Cuando es de orden 1 NUNCA da 0 (pues el res se calcula con el cálculo del orden donde pedimos que sea $\neq 0$)

$$\therefore \oint_{|z+i|=1/2} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}\,dz = 0$$

$\square$

P6 a) Probemos el Teo. de Liouville.

Para ello recordemos las desig. de Cauchy:

Si $f \in H(\Omega)$ entonces: $\forall p \in \Omega$:

$$|f^{(k)}(p)| \leq \frac{k! \cdot M_r}{r^k} \quad \text{con } M_r = \sup_{z \in \partial D(p,r)} |f(z)|. \quad r \text{ tal que } D(p,r) \subset \Omega$$

(Conocido, pueden usarlo!)

(de hecho puede tomarse $\partial D(z_0, r)$ con $p \in D(z_0,r) \subset \Omega$)

En efecto, por la fórmula de Cauchy para derivadas:

$$f^{(k)}(p) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\partial D(p,r)} \frac{f(z)}{(z-p)^{k+1}} dz \underset{\substack{\gamma(\theta) = p + re^{i\theta} \\ \gamma'(\theta) = ire^{i\theta}}}{=} \frac{k!}{2\pi \cancel{i}} \int_0^{2\pi} \frac{f(p+re^{i\theta})}{r^{k\cancel{+1}} e^{i(k+1)\theta}} \cdot \cancel{i}\cancel{r}\cancel{e^{i\theta}} \, d\theta$$

$$= \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(p+re^{i\theta})}{r^k e^{ik\theta}} d\theta$$

$$\Rightarrow |f^{(k)}(p)| \leq \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(p+re^{i\theta})|}{r^k \underbrace{|e^{ik\theta}|}_{1}} d\theta = \frac{k!}{2\pi r^k} \int_0^{2\pi} |f(\underbrace{p+re^{i\theta}}_{z \in \partial D(p,r)})| \, d\theta$$

$$\leq \frac{k!}{r^k} \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \underbrace{\sup_{z \in \partial D(p,r)} |f(z)|}_{M_r} d\theta = \frac{k!}{r^k} M_r \cdot \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta}_{1} = \frac{k!}{r^k} M_r$$

$$\therefore \ |f^{(k)}(p)| \leq \frac{k! M_r}{r^k} \quad \forall p \in \Omega.$$

Probemos ahora Liouville: Para ello, como queremos ver que $f \in H(\mathbb{C})$ es constante basta ver que $f'(p) = 0 \ \forall p \in \mathbb{C}$.

De la desig. de Cauchy para $k=1$

$$|f'(p)| \leq \frac{M_r}{r}$$

Como $f \in H(\mathbb{C})$ esto vale $\forall r$! (ie. puedo hacer $r \to \infty$)

y como f es acotada $\Rightarrow M_r = \sup_{z \in \partial D(p,r)} |f(z)| \leq \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ acot en } \mathbb{C}}}{\sup_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|} < M$

$$< \frac{M}{r} \xrightarrow[r \to \infty]{} 0.$$

$$\therefore \ f'(p) = 0 \ \forall p \Rightarrow f \equiv cte. \quad \square$$

Veamos las consecuencias:

a.1) Si $f \in H(\mathbb{C})$ no es constante, entonces $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$.

Recuerdo: A es denso en $\mathbb{C}$ si $\forall z \in \mathbb{C}\ \exists a \in A$ tq $\forall \varepsilon > 0\ |z-a| < \varepsilon$.

(o sea, todo punto de $\mathbb{C}$ tiene "cerca" un punto de A)

Ejemplo típico: En $\mathbb{R}$: $\mathbb{Q}$ es denso.

Probemos lo pedido por contradicción. Sea $f \in H(\mathbb{C})$ no constante.

Supongamos que $f(\mathbb{C})$ no es denso en $\mathbb{C}$, ie. $\exists \hat{z} \in \mathbb{C}$ tq $\forall z \in \mathbb{C}\ \ |f(z) - \hat{z}| > \varepsilon$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\varepsilon} > \dfrac{1}{|f(z) - \hat{z}|}$ $\forall z \in \mathbb{C}$

si consideramos la función $g(z) = \dfrac{1}{f(z) - \hat{z}}$ esta cumple:

- $g \in H(\mathbb{C})$ pues $f \in H(\mathbb{C})$ y no se anula ($f(z) \neq \hat{z}\ \forall z$!)
- $|g(z)| = \dfrac{1}{|f(z) - \hat{z}|} < \dfrac{1}{\varepsilon}$ ie. es acotada

Por Liouville: $g(z) \equiv \text{cte.} = \dfrac{1}{f(z) - \hat{z}} \Rightarrow f(z) = \dfrac{1}{\text{cte.}} + \hat{z} \leftarrow$ constante! $\hat{z}$ es fijo!

$\rightarrow\!\leftarrow$ pues f no era constante

$\therefore f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$.

a.2) $f, g \in H(\mathbb{C})$ tq $\forall z \in \mathbb{C}$: $\operatorname{Re} f \leq k \cdot \operatorname{Re} g$ k cte. indep. de z. (notar que $k \in \mathbb{R}$ pues $\operatorname{Re}(\cdot): \mathbb{C} \to \mathbb{R}$)

Veamos que $\exists\, a, b$ tq $f(z) = a g(z) + b$.

En efecto. notemos que la función $f - kg = h$

cumple: $\operatorname{Re}(f - kg) = \operatorname{Re} f - k \operatorname{Re} g \leq 0$ $(*)$

así, necesitamos una función holomorfa tal que su módulo SOLO dependa de su parte real. Dicha función es por ejemplo la exponencial compleja

ie. Tomemos $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{holomorfa pues } f \wedge g \text{ lo son}}}{H} = e^h = e^{f-kg} \Rightarrow |H| = |e^{f-kg}| = e^{\operatorname{Re}(f-kg)} = e^{\operatorname{Re} f - k \operatorname{Re} g} \underset{(*)}{\leq} e^0 = 1$

$\therefore$ Por Liouville $H = e^h = \text{Cte} \Rightarrow h = \ln(\text{Cte}) = f - kg$

$\Rightarrow f = kg + \ln(\text{Cte}) = ag + b$ $\square$

b) hay que agregar como hipótesis que $f \in H(\mathbb{C})$.

Debemos probar que $\exists k \in \mathbb{N} \wedge a, b \in \mathbb{R}$ tq $|f(z)| \leq a + b|z|^k \Leftrightarrow f$ es polin. de grado k.

($\Leftarrow$) Es directo.

Si f es pol. de grado $k \Rightarrow f(z) = \sum_{n=0}^{k} a_n z^n$

Luego basta escoger a suf. grande y b suf. grande para tener la desigualdad

($\Rightarrow$) Esto es más delicado. Solo sabemos que $|f(z)| \leq a + b|z|^k$.

Como $f \in H(\mathbb{C})$ $\forall p \in \mathbb{C}$ f se puede escribir en serie de potencias

i.e. $f(p) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - p)^n$ con $a_n = \frac{f^{(n)}(p)}{n!}$

$\therefore$ basta ver que $\forall p \in \mathbb{C}$: $a_n = 0$ si $n \geq k+1$

o equivalentemente (por la fórmula de a_n) que $f^{(n)}(p) = 0$ $\forall n \geq k+1$.

En efecto: Por las desig de Cauchy

$$|f^{(n)}(p)| \leq \frac{n!}{r^n} \cdot M_r \quad \forall r \quad \text{con } M_r = \sup_{z \in \partial D(p,r)} |f(z)| \overset{\text{Hipot.}}{\leq} a + |z|^k \quad (z \in \partial D(p,r))$$
$$= a + r^k$$

$$\leq \frac{n!\,(a + b r^k)}{r^n} \qquad n \geq k+1$$

$$= \frac{n!\,a}{r^n} + \frac{b}{\underbrace{r^{n-k}}_{\geq 1}} \xrightarrow[r \to \infty]{} 0.$$

$\therefore f^{(n)}(p) = 0$ $\forall n \geq k+1$, $\forall p \in \mathbb{C}$. $\Rightarrow a_n = 0$ $\forall n \geq k+1$

$\therefore f$ es polinomio de grado k

$\square$