Auxiliar Extra Control 2 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Miércoles 25 de Mayo, 2011

Profesor Cátedra: Jaime H. Ortega
Profesores Auxiliares: Benjamín Obando Vallejos - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Considere los operadores diferenciales $\frac{\partial}{\partial z}$ y $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$ definidos por:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

a) Pruebe que $f = u + iv$ satisface las condiciones de Cauchy-Riemann si y sólo si $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$

b) Si $f \in H(\Omega)$, muestre que $\forall z \in \Omega,\ f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}$

c) Explicite en términos de u y v a que corresponde la ecuación $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 0$

Pregunta 2.

a) Determine el conjunto A de todos los $z \in \mathbb{C}$ tal que:

$$f(z) = z - i|z|^2 + \Re(z)(\Im(z))^2$$

es holomorfa.

b) Sea $f : D(0,1) \to \mathbb{C}$ función holomorfa. Sean $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tales que, si $z = x + iy$ entonces $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$. Suponga que $u = v^2$. Pruebe que f es constante en su dominio.

c) Sea $f \in H(\Omega)$. Pruebe que si $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ entonces: $\Delta u = \Delta v = 0$

Pregunta 3. Determine el valor de las siguientes integrales:

a) $\oint_{\partial D(0,3)} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz$ con orientación antihoraria.

b) $\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}} d\theta$

Pregunta 4. Sea f una función holomorfa en $D(0,1)$ y continua en $\overline{D(0,1)}$ tal que $f(0) = 1$

a) Usando integrales de la forma:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left[2 \pm \left(z + \frac{1}{z}\right)\right]\frac{f(z)}{z} dz$$

y la Fórmula integral de Cauchy, pruebe que:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2} d\theta = 2 + f'(0) \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin^2\frac{\theta}{2} d\theta = 2 - f'(0)$$

b) Concluya que si f es como antes, y además $\Re(f(z)) \geq 0$ en $\overline{D(0,1)}$, entonces: $|\Re(f'(0))| \leq 2$

Pregunta 5.

a) La función $f(z) = \frac{(z^2-4)(z-1)^4}{(\sin \pi z)^4}$ tiene singularidades en los puntos $z = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Clasifique todas las singularidades de f, distinguiendo si se trata de singularidades evitables o polos, e indicando el orden cuando corresponda. No se pide que calcule los residuos.
Indicación: Calcule primero: $\lim_{z \to n} \frac{\sin \pi z}{z - n}$ con $n \in \mathbb{Z}$

b) Determine el valor de la integral $\oint_\Gamma \frac{e^{iz}}{(z^2+1)^2}dz$ para la curva Γ correspondiente a la circunferencia $|z+i| = 1/2$ recorrida en sentido antihorario.

Pregunta 6.

a) Demuestre el Teorema de Liouville: Si $f \in H(\mathbb{C})$ es acotada, entonces f es constante en $\mathbb{C}$. Pruebe además las siguientes consecuencias:

a.1) Si $f \in H(\mathbb{C})$ no es constante, entonces el conjunto $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$.

a.2) Sean $f, g \in H(\mathbb{C})$ tal que $\forall z \in \mathbb{C} : \Re f \leq k \Re g$ para alguna constante real k independiente de z. Pruebe que existen $a, b \in$ tal que: $f(z) = ag(z) + b$.

b) Demuestre la siguiente equivalencia: Existe un natural $k \in \mathbb{N}$ y dos reales positivos a, b tales que $|f(z)| \leq a + b|z|^k$ para todo $z \in \mathbb{C}$ sí y solo sí f es un polinomio de grado k.
<u>Indicación</u>: Use las desigualdades de Cauchy.