Problema Adicional - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Mayo de 2011

Profesor Cátedra: Jaime H. Ortega
Profesores Auxiliares: Benjamín Obando Vallejos - Matías Godoy Campbell

Probemos el Teorema de Riemann para singularidades removibles: Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, y $p \in \Omega$. Sea $f \in H(D \setminus \{p\})$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

a) f se puede extender de manera holomorfa a todo Ω
b) f se puede extender de manera continua a todo Ω
c) Existe una vecindad de p (que no incluye a p) donde f es acotada
d) $\lim_{z\to p}(z-p)f(z) = 0$

Demostración: Las implicancias $a) \Rightarrow b) \Rightarrow c) \Rightarrow d)$ son directas, en efecto:
a) $\Rightarrow$ **b)**: Si extendemos de manera holomorfa en particular extendemos de manera continua (ser holomorfa es una propiedad más fuerte!)
b) $\Rightarrow$ **c)**: Dado que f se puede extender de manera continua a todo Ω, entonces tenemos que la extensión es continua en p, en tal caso, denotando por simplicidad f a la extensión, si es continua en p, basta tomar una vecindad compacta (cerrada y acotada) por ejemplo $\overline{D}(p,r) \subset \Omega$ con $r > 0$ suficientemente pequeño para que el conjunto esté contenido en Ω (esto se puede hacer pues Ω es abierto).
Como la extensión f es continua en todo Ω y $\overline{D}(p,r)$ es cerrado y acotado, entonces f alcanza su máximo en tal conjunto, el cual es finito (por definición de continuidad) y acota a f en tal vecindad, que es lo deseado.
c) $\Rightarrow$ **d)**: Basta notar que, si f está acotado en una vecindad de p, que llamaremos $\mathcal{N}_p$, entonces:

$$|f(z)| \leq M,\ \forall z \in \mathcal{N}_p$$

Luego, $\forall z \in \mathcal{N}_p$:

$$|(z-p)f(z)| \leq |z-p|M \Rightarrow \lim_{z\to p}|(z-p)f(z)| \leq \lim_{z\to p}|z-p|M = 0$$

Por lo tanto:

$$\lim_{z\to p}(z-p)f(z) = 0$$

Finalmente, probemos la implicancia más dificil, a partir del límite d) debemos probar que podemos extender f de manera holomorfa a todo Ω
d) $\Rightarrow$ **a)** Definamos la siguiente función:

$$h(z) = \begin{cases} (z-p)^2 f(z) & \text{si } z \neq p \\ 0 & \text{si } z = p \end{cases}$$

Es claro que h es holomorfa en $\Omega \setminus \{p\}$ pues en tal caso es composición de funciones holomorfas en tal dominio. Notemos además que:

$$h'(p) = \lim_{z\to p}\frac{(z-p)^2 f(z) - 0}{z-p} = \lim_{z\to p}(z-p)f(z) = 0$$

lo último viene de la hipótesis d).
Así, se concluye que $h(z)$ es holomorfa en Ω, sabemos que en tal caso existe una expansión de Taylor en un disco de radio $r > 0$ centrado en p, es decir:

$$h(z) = \sum_{k\geq 0} a_k (z-p)^k$$

con $a_0 = h(p) = 0$, $a_1 = h'(p) = 0$. Finalmente escogiendo:

$$g(z) = \frac{h(z)}{(z-p)^2}$$

se tiene que g es una extensión holomorfa de f en p (en el resto de Ω se tiene claramente), lo que prueba lo deseado.