**Auxiliar 9 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones**
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
*Lunes 09 de Mayo, 2011*

*Profesor Cátedra: Jaime H. Ortega*
*Profesores Auxiliares: Benjamín Obando Vallejos - Matías Godoy Campbell*

**Pregunta 1.**

**a)** Sea $\Gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ un camino, parametrizado vía $\gamma(t)$, sea $f$ continua en la región encerrada por $\Gamma$. Pruebe que

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = -\int_{\Gamma^{-1}} \frac{f(z^{-1})}{z^2}dz$$

donde $\Gamma^{-1}$ se parametriza vía $\gamma^{-1}(t) = 1/\gamma(t)$.

**b)** Demuestre que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}d\theta = \frac{2\pi}{ab}$ con $a, b > 0$

Indicación: Use $f(z) = \frac{1}{z}$ y el camino dado por la elipse centrada en el origen de semiejes $a$ y $b$.

**Pregunta 2.** El objetivo de este problema es dar una demostración alternativa al Teorema Fundamental del Álgebra, es decir, probaremos que: "Todo polinomio no constante, con coeficientes complejos posee al menos una raíz compleja". Para ello, siga los siguientes pasos:

**a)** Sean $p(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$ y $q(z) = \overline{a_0} + \cdots + \overline{a_n} z^n$ con $n \geq 1$. Pruebe entonces que $r \in \mathbb{C}$ es raíz de $p$ sí y solo sí $\overline{r}$ es raíz de $q$. Concluya que si $p$ no tiene raíces, entonces $q$ tampoco las tiene. Y por lo tanto, la función definida por $f(z) = \frac{1}{p(z)q(z)}$ es holomorfa.

**b)** Utilizando el teorema de Cauchy-Goursat en una semi-circunferencia llegue a una contradicción. Concluya.

**Pregunta 3.** Demuestre que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2bx)dx = \frac{e^{-b^2}\sqrt{\pi}}{2} \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

Para el caso $b \neq 0$ considere la función $f(z) = e^{-z^2}e^{2ibz}$ y la región rectangular de vértices: $-R, R, i\tau + R, i\tau - R$ con $\tau \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ a ser fijado de forma conveniente.

**Pregunta 4.** Determine el valor de las siguientes integrales:

**a)** $\displaystyle\oint_{\partial D(0,3)} \frac{\sin(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)}dz$ con orientación antihoraria.

**b)** $\displaystyle\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}d\theta$

**Pregunta 5.** Sea $f$ una función holomorfa en $D(0,1)$ y continua en $\overline{D(0,1)}$ tal que $f(0) = 1$

**a)** Usando integrales de la forma:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1}\left[2 \pm \left(z + \frac{1}{z}\right)\right]\frac{f(z)}{z}dz$$

y la Fórmula integral de Cauchy, pruebe que:

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}d\theta = 2 + f'(0) \qquad \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}d\theta = 2 - f'(0)$$

**b)** Concluya que si $f$ es como antes, y además $\Re(f(z)) \geq 0$ en $\overline{D(0,1)}$, entonces:

$$|\Re(f'(z))| \leq 2$$