Auxiliar 6 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Lunes 18 de Abril, 2011

Profesor Cátedra: Jaime H. Ortega
Profesores Auxiliares: Benjamín Obando Vallejos - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. La presión a una profundidad h en un estanque es $p(h) = p_0 + \rho_0 gh$ con ρ_0 la densidad del líquido, p_0 la presión atmosférica y g la aceleración de gravedad. La fuerza neta experimentada por un cuerpo Ω sumergido en el líquido viene dada por:

$$\vec{F} = \iint_{\partial\Omega} p\hat{n}dS$$

Calcule $\vec{F} \cdot \hat{e}$ para $\hat{e} = \hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$ y deduzca el *Principio de Arquímides*:

$$\vec{F} = \rho_0 g \mathrm{Vol}(\Omega)\hat{k}$$

Pregunta 2. Considere el campo vectorial en coordenadas cartesianas:

$$\vec{F} = \frac{1}{x^2+y^2}\left(x - y\sqrt{x^2+y^2}\,\arctan(z^2)\ ,\ y + x\sqrt{x^2+y^2}\,\arctan(z^2)\ ,\ z(x^2+y^2)\right)$$

a) Determine el dominio de diferenciabilidad de $\vec{F}$ y encuentre la expresión del campo en coordenadas cilíndricas, i.e. $\vec{F} = F_\rho\hat{\rho} + F_\theta\hat{\theta} + F_z\hat{z}$

b) Calcule la divergencia de $\vec{F}$ y el flujo de $\vec{F}$ a través del volumen descrito por $|x| \leq 1 + z^2$, $|y| \leq 1 + z^2$ y $-1 \leq z \leq 1$, orientado según la normal exterior. Grafique.
Indicación: El volumen de la región considerada es $\frac{224}{15}$.

Pregunta 3.

a) Calcule $I = \iint_S \mathrm{rot}\vec{F} \cdot d\vec{S}$ mediante el Teorema de Stokes, para $\vec{F}(x, y, z) = (y, z, 2x)$ y la superficie $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$ donde:
- S_1: Disco de radio a.
- S_2: $\frac{3}{4}$ de manto de cilindro de radio a y altura h.
- S_3: Triángulo rectángulo de catétos a y h.
- S_4: $\frac{3}{4}$ disco de radio a.

Considere que el eje del cilíndro es el eje Z, que el plano XY contiene a S_4, y que el plano XZ contiene a S_3.

b) Sea $\mathcal{C}$ una curva simple cerrada y regular sobre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$. Calcule el trabajo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (2y^2, x^2, 3z^2)$ a lo largo de $\mathcal{C}$.
Indicación: Calcule $\mathrm{rot}\vec{F}$

Pregunta 4.

a) Considere el campo $\vec{F} = (\alpha e^x yz, e^x z + \beta yz, e^x y + \gamma y^2 + 1)$
Determine los valores de α, β, γ para que el campo $\vec{F}$ sea conservativo, determine su potencial.

b) Verifique que

$$\vec{F}(x, y, z) = (y^2\cos(x) + z^3, 2y\sin(x) - 4, 3xz^2 + 2z)$$

es un campo conservativo y encuentre un potencial escalar asociado.

c) Considere ahora

$$\vec{G}(x, y, z) = (y^2\cos(x) + 2z^3, 2y\sin(x) - 4, 3xz^2 + 2z)$$

Calcule $\int_\Gamma \vec{G} \cdot d\vec{r}$, donde Γ es la curva que consta del arco $y = x^2$, $z = 0$ que parte desde el origen y llega al punto $(1, 1, 0)$ unida al segmento recto que une los puntos $(1, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.