Ejercicio 1 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Jueves 14 de Abril, 2011

Profesor de Cátedra: Jaime H. Ortega
Profesores Auxiliares: Benjamín Obando Vallejos - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Se define el campo eléctrico generado por una carga Q constante, ubicada en el origen, como $\vec{E}(\vec{r}) = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\vec{r}}{||\vec{r}||^3}$, donde ϵ_0 es una constante positiva.

El propósito de esta pregunta es probar la conocida Ley de Gauss de Electromagnetismo que dice:
Si Ω es un abierto con frontera $\partial\Omega$ regular por pedazos, con $\vec{0} \notin \partial\Omega$ entonces:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \begin{cases} 0 & \text{si } (0,0,0) \notin \Omega \\ \frac{Q}{\epsilon_0} & \text{si } (0,0,0) \in \Omega \end{cases}$$

Para ello:

a) Escriba el campo eléctrico en coordenadas esféricas.
b) Calcule por definición el flujo del campo eléctrico a través del casquete esférico de radio a, centrado en el origen y orientado según la normal exterior.
c) Calcule el flujo del campo eléctrico a través de Ω cuando Ω no contiene al origen.
d) Calcule el flujo del campo eléctrico a través de Ω cuando Ω contiene al origen, para ello defina una región Ω_ε donde se satisfagan las condiciones del Teorema de la Divergencia. Concluya.

Indicación: Recuerde que si $\vec{F} = F_r\hat{r} + F_\theta\hat{\theta} + F_\varphi\hat{\varphi}$, entonces:

$$\text{div } \vec{F} = \frac{1}{r^2\sin\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(F_r r^2\sin\varphi) + \frac{\partial}{\partial\theta}(F_\theta r) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(F_\varphi r\sin\varphi)\right]$$

Tiempo: 1 Hora.