Auxiliar 3 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Lunes 04 de Abril, 2011

Profesor Cátedra: Jaime H. Ortega
Profesores Auxiliares: Benjamín Obando Vallejos - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1. Sea S la esfera de radio R y $\vec{p} \in \mathbb{R}^3$ (que no está en S). Demuestre que:

$$\iint_S \frac{1}{||\vec{x}-\vec{p}||} dA = \begin{cases} 4\pi R & \text{Si } \vec{p} \text{ está en } int(S) \\ 4\pi R^2/d & \text{Si } \vec{p} \text{ no está en } int(S) \end{cases}$$

Determine d en el segundo caso.
Indicación: Note que no hay pérdida de generalidad al suponer que $\vec{p} = ||\vec{p}||\hat{k}$ (Esto pues, en caso contrario basta realizar una rotación de los ejes, lo cual deja el resultado invariante)

Pregunta 2.

a) Dados $\vec{F} \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, $g \in \mathcal{C}^1$ pruebe la identidad:

$$div(g\vec{F}) = \nabla g \cdot \vec{F} + g div(\vec{F})$$

Muestre que para todo $f, g \in \mathcal{C}^2(\Omega')$ con $\Omega \cup \partial\Omega \subset \Omega'$ se tiene la identidad de Green:

$$\iiint_\Omega (g\Delta f + \nabla f \cdot \nabla g) dV = \iint_{\partial\Omega} g \nabla f \cdot d\vec{S}$$

b) Sea S la superficie del casquete esférico $x^2+y^2+z^2 = 4$, que se encuentra en la región $z \geq 1$ y que se orienta según la normal superior (exterior a la esfera). Calcule el flujo de $\nabla \times \vec{F}$ a través de S donde $\vec{F}(x,y,z) = (e^z - x^2y)\hat{\imath} + (z + xy^2)\hat{\jmath} + y^2\sqrt{1+z^4}\hat{k}$

Pregunta 3. *Conservación y unicidad en la ecuación del calor*
Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado de frontera regular y $u(x,y,z,t)$ la temperatura en (x,y,z) en el instante $t \geq 0$ la cual satisface:

$$(EC) \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u & \text{en } \Omega \times (0,\infty) \\ u(x,y,z,t) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(x,y,z,0) = u_0(x,y,z) & \text{sobre } \Omega \end{cases}$$

donde la condición inicial u_0 es una función de clase $\mathcal{C}^1$. Pruebe que la cantidad:

$$U(t) = \frac{1}{2}\iiint_\Omega u(x,y,z,t)^2 dV + \int_0^t \iiint_\Omega ||\nabla u(x,y,z,s)||^2 dV ds$$

es constante para $t \geq 0$ y deduzca de esto la unicidad de soluciones para (EC)

Pregunta 4. De acuerdo a la teoría de Yukawa para las fuerzas nucleares, la fuerza de atracción entre un protón y un neutrón tiene como potencial a $U(r) = K\frac{e^{-\alpha r}}{r}$ en coordenadas esféricas, para ciertas constantes $K < 0$ y $\alpha > 0$:

a) Encuentre la fuerza $\vec{F} = -\nabla U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

b) Calcule directamente el flujo de $\vec{F}$ a través del casquete esférico de radio a ($a > 0$) orientado según la normal exterior.

c) Pruebe que $\Delta U = \alpha^2 U$ en $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

d) Demuestre que si $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ es un abierto acotado que contiene al origen, cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular a trozos y orientada según la normal exterior, entonces:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4\pi K - \alpha^2 \iiint_\Omega U dV$$

¿Contradice este resultado el teorema de la divergencia de Gauss? Explique.

Pregunta 5. Sean S una superficie suave y $\vec{P}$ un punto, tales que toda recta que pasa por $\vec{P}$ corta a S en a lo más un punto. Sea Ω la unión de todas las semi-rectas que parten de $\vec{P}$ y pasan por S, y sea ε_a la intersección de Ω con la superficie esférica de centro $\vec{P}$ y radio a. Demuestre que:

$$s = \frac{\text{Area de } \varepsilon_a}{a^2} = \iint_S \frac{(\vec{x} - \vec{P}) \cdot \hat{n}}{||\vec{x} - \vec{P}||^3} dS$$

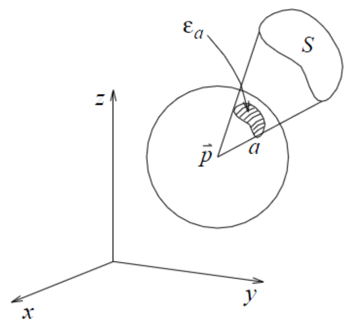

Figura 1: s se denomina ángulo sólido de S con respecto a $\vec{P}$