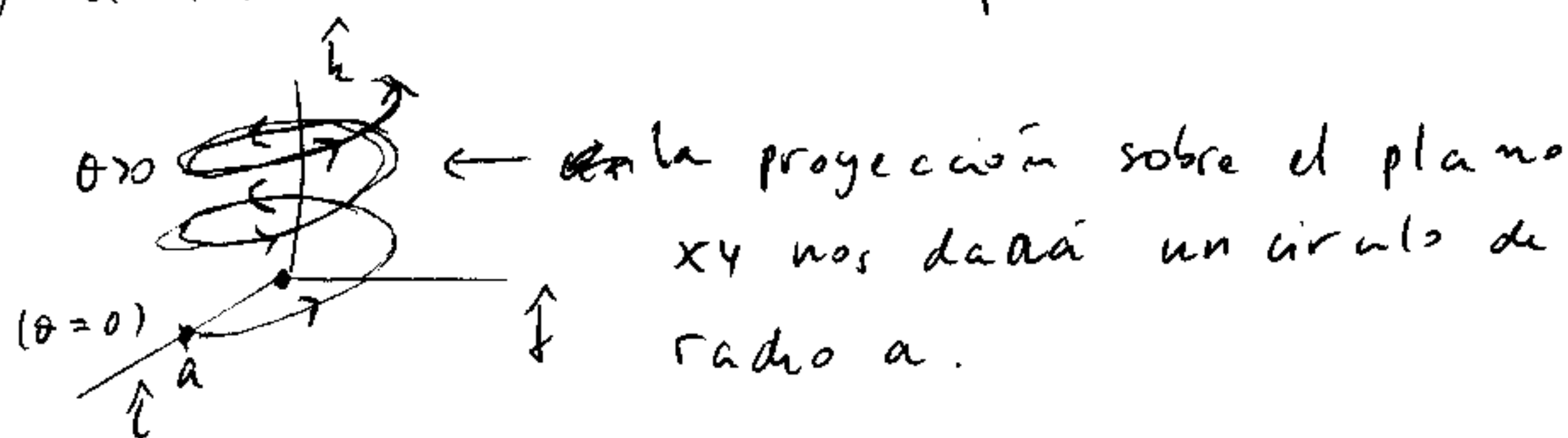


Pauta Pendientes

P5 | Queremos $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ con $\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \vec{r}$, $r = \|\vec{r}\|$. Helice circular con ^{radio} $a > 0$
 $\omega = 1$, $b > 0$ (desp. vertic. unit).

ie. Γ se parametriza vía $\vec{r}(\theta) = a \cos(\omega\theta) \hat{i} + a \sin(\omega\theta) \hat{j} + b\theta \hat{k}$.
 (helice en genl) idea de la param: los terminos en $\hat{i}$ y $\hat{j}$ son los de una circunf.
 (de ahí lo de "circular") el termino en $\hat{k}$ nos dice que va "subiendo"
 (o bajando si $b < 0$)



Luego, en nuestro caso: Γ se parametriza por: ^{dos media vuelta.}
 $\vec{r}(\theta) = a \cos \theta \hat{i} + a \sin \theta \hat{j} + b\theta \hat{k}$ $\theta \in [0, \pi]$

Además: $\|\vec{r}\| = r = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta + b^2 \theta^2} = \sqrt{a^2 + b^2 \theta^2}$

y $\frac{d\vec{r}}{d\theta} = -a \sin \theta \hat{i} + a \cos \theta \hat{j} + b \hat{k}$.

Luego: $\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi} \vec{F}(\vec{r}(\theta)) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\theta} d\theta = \int_0^{\pi} \frac{-k}{(a^2 + b^2 \theta^2)} \cdot \begin{pmatrix} a \cos \theta \\ a \sin \theta \\ b \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \sin \theta \\ a \cos \theta \\ b \end{pmatrix} d\theta$.

$= \int_0^{\pi} \frac{-k}{a^2 + b^2 \theta^2} (-a^2 \cos \theta \sin \theta + a^2 \cos \theta \sin \theta + b^2 \theta) d\theta$

$= - \int_0^{\pi} \frac{k b^2 \theta}{a^2 + b^2 \theta^2} d\theta = -k \int_0^{\pi} \frac{\frac{b^2}{a^2} \theta}{1 + \frac{b^2}{a^2} \theta^2} d\theta = -k \int_0^{\pi} \frac{\frac{b^2}{a^2} \theta}{1 + \frac{b^2}{a^2} \theta^2} d\theta$

Para resolver la integral la idea es "armar" la derivada del denominador
 en el numerador de modo que usemos $\int \frac{f'}{f} = \ln(f) + C$
 (esto es intuitivo pues $(\text{ctes} \cdot \theta^2)' = \text{ctes} \cdot \theta$)

así, como $(1 + \frac{b^2}{a^2} \theta^2)' = \frac{2b^2}{a^2} \theta$: ^{denom} ^{num.}

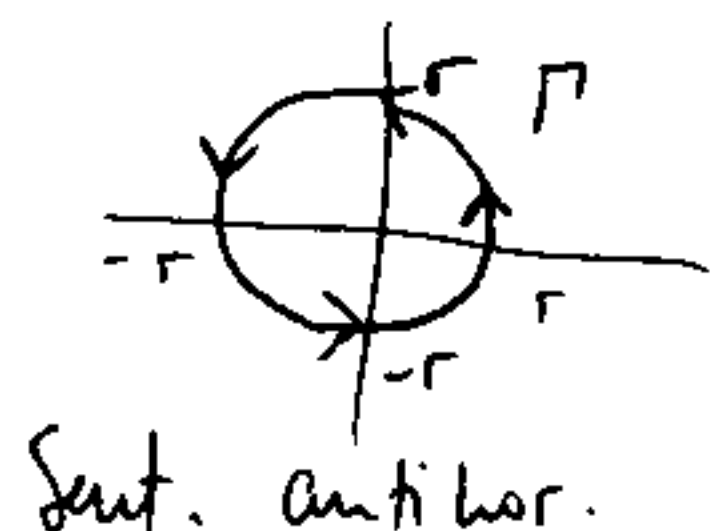
$-k \int_0^{\pi} \frac{\frac{b^2}{a^2} \theta}{1 + \frac{b^2}{a^2} \theta^2} d\theta = -\frac{k}{2} \int_0^{\pi} \frac{2 \frac{b^2}{a^2} \theta}{1 + \frac{b^2}{a^2} \theta^2} d\theta = -\frac{k}{2} \ln \left(1 + \frac{b^2}{a^2} \theta^2 \right) \Big|_0^{\pi} = -\frac{k}{2} \ln \left(\frac{1 + \frac{b^2}{a^2} \pi^2}{1} \right) = \frac{k}{2} \ln \left(\frac{a^2}{a^2 + b^2 \pi^2} \right)$

$P \mid \vec{F}: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2. \quad \vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} \right)$

Se def. (dada P curva cerrada) $m(P) := \frac{1}{2\pi} \oint_P \vec{F} \cdot d\vec{r}$

a) $\vec{\varphi}(t) = (r \cos t, r \sin t), t \in [0, 2\pi] \Rightarrow \vec{\varphi}'(t) = (-r \sin t, r \cos t)$

Bos guyo:

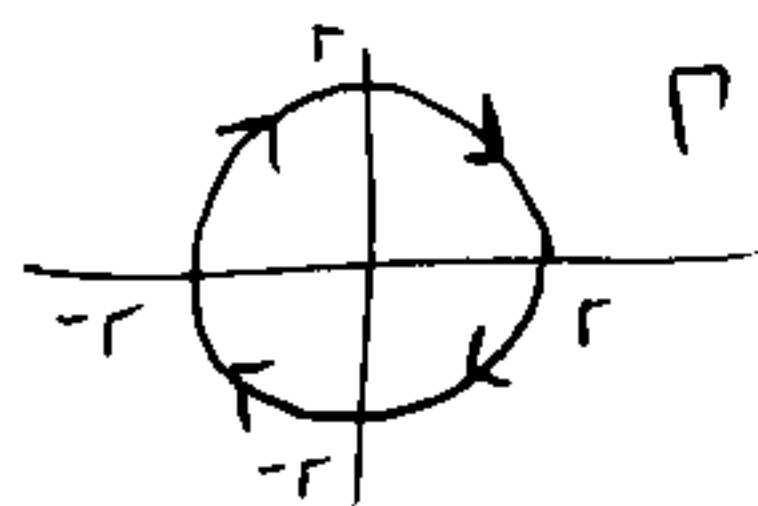


Sent. antihor.

$$\begin{aligned} m(P) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\varphi}(t)) \cdot \frac{d\vec{\varphi}}{dt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{-r \sin t}{r^2}, \frac{r \cos t}{r^2} \right) \cdot \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 1 dt = 1 // \end{aligned}$$

b) $\vec{\varphi}(t) = (r \cos t, -r \sin t) t \in [0, 2\pi]$

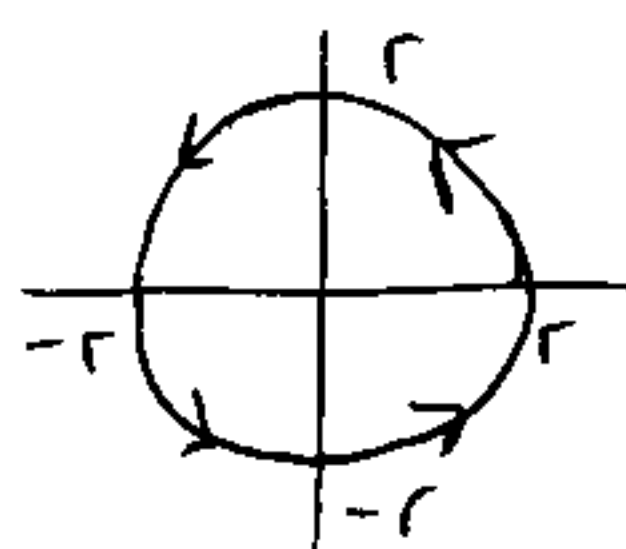
$\rightarrow \vec{\varphi}'(t) = (-r \sin t, -r \cos t)$



Sent. Horario

$$\begin{aligned} m(P) &= \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{\varphi}(t)) \cdot \frac{d\vec{\varphi}}{dt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{r \sin t}{r^2}, \frac{r \cos t}{r^2} \right) \cdot \begin{pmatrix} -r \sin t \\ -r \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} -1 dt = -1 // \end{aligned}$$

c) $\vec{\varphi}(t) = (r \cos t, r \sin t) t \in [0, 4\pi]$



antihorario

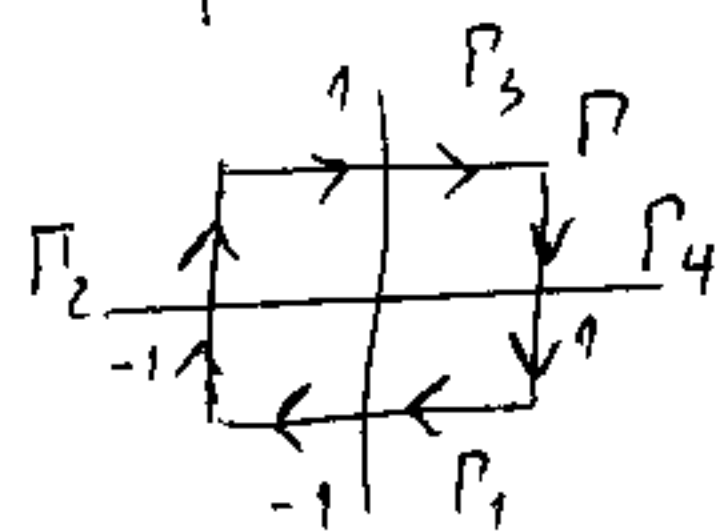
2 vueltas ($t \in [0, 4\pi]$)

$$m(P) = \frac{1}{2\pi} \oint_P \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} 1 dt = 2 //$$

misma param.

de a) pero de $[0, 4\pi]$

10) Γ frontera de $[-1,1] \times [-1,1]$ sent. horario.



$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4$$

Calculemos cada integral:

¿ Γ_1 ? Param: $\vec{r}(t) = (-t, -1) \quad t \in [-1, 1]$. (sent. horario) " $\leftarrow$ "
 $\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = (-1, 0)$

$$\int_{\Gamma_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{-t}{t^2+1} \right) \cdot (-1, 0) dt = \int_{-1}^1 \frac{-dt}{1+t^2} = -\arctg(t) \Big|_{-1}^1$$

$$= \arctg(-1) - \arctg(1)$$

$$= -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2}$$

¿ Γ_2 ? Param: $\vec{r}(t) = (-1, t) \quad t \in [-1, 1]$
 $\Rightarrow \frac{d\vec{r}}{dt} = (0, 1)$

$$\int_{\Gamma_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^1 \left(\frac{-t}{1+t^2}, \frac{-1}{1+t^2} \right) (0, 1) dt = \int_{-1}^1 \frac{-dt}{1+t^2} = -\frac{\pi}{2}$$

¿ Γ_3 ? Param: $\vec{r}(t) = (t, 1) \quad t \in [-1, 1] \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = (1, 0)$

$$\int_{\Gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^1 \left(\frac{-1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2} \right) (1, 0) dt = \int_{-1}^1 \frac{-dt}{1+t^2} = -\frac{\pi}{2}$$

¿ Γ_4 ? Param: $\vec{r}(t) = (1, -t) \quad t \in [-1, 1] \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = (0, -1)$

$$\int_{\Gamma_4} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^1 \left(\frac{t}{1+t^2}, \frac{+1}{1+t^2} \right) \cdot (0, -1) dt = \int_{-1}^1 \frac{-dt}{1+t^2} = -\frac{\pi}{2}$$

$$\circ \quad m(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\pi}{2} \cdot 4 \right) = -1 //$$

¿Es $\vec{F}$ conservativo en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? No, pues tenemos integrales en caminos cerrados tal que $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$.

La terminología está asociada a que $m(\Gamma)$ calcula el número de vueltas que se realiza en sentido anti-horario en torno al origen.
 (En realidad calcula el n.º de vueltas respecto a la singularidad de $\vec{F}$).

b) $\vec{\gamma}(t) = (2r - r \cos(t), r \sin(t))$. $t \in [0, 2\pi]$.

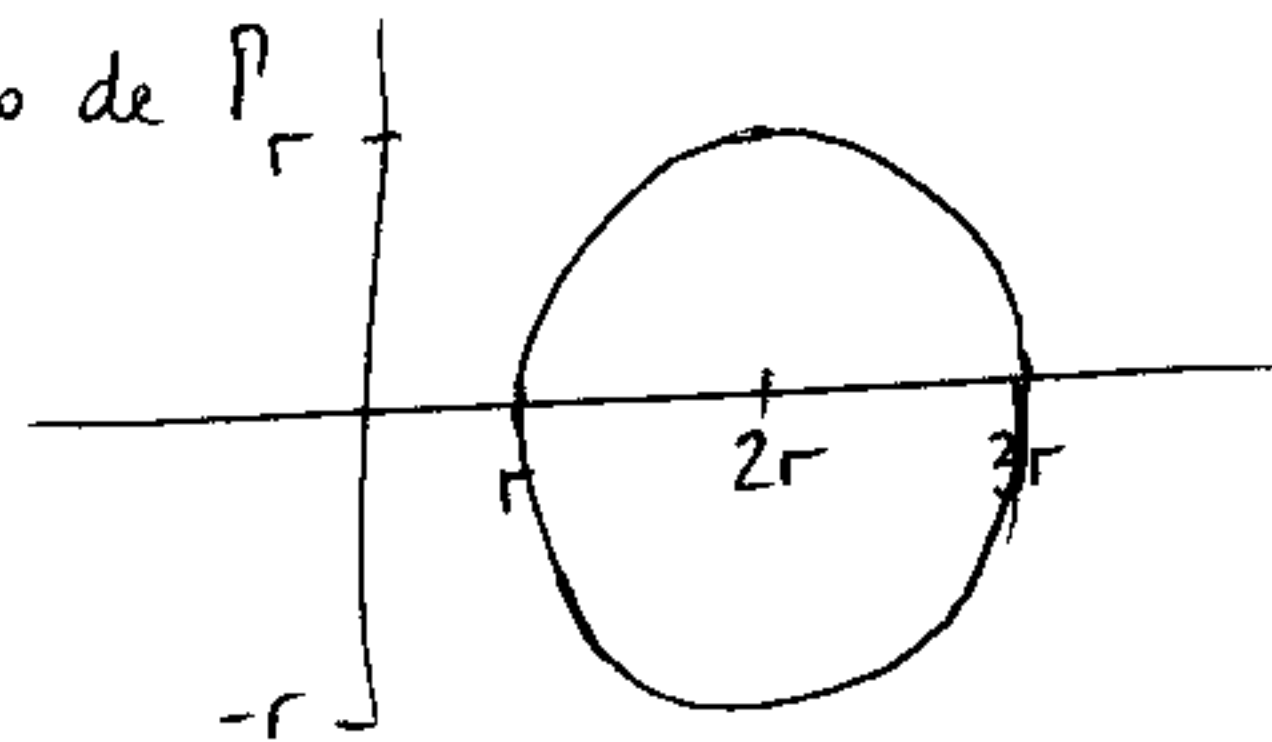
Calcular $m(\Gamma)$ $\forall \Gamma$ cont. en un rectángulo R tal que R contenga a la curva param. por $\vec{\gamma}$.

Hint. Buscar g tq $\vec{F} = \nabla g$ con $g: R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. R Rectángulo que contenga a Γ .

Buscar $g(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

sol. Usemos el Hint. Determinemos g .

Obs. Búsqueda de Γ_r



Queremos $g(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ tq $\vec{F} = \nabla g$

Luego: $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \nabla g = \begin{pmatrix} g_x \\ g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(f\left(\frac{y}{x}\right) \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(f\left(\frac{y}{x}\right) \right) \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(f\left(\frac{y}{x}\right) \right) = f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{y}{x} \right) = f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{-y}{x^2}$

$\Rightarrow \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-y}{x^2} f'\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+y^2} = f'\left(\frac{y}{x}\right)$

Por otra parte:

$\frac{x}{x^2+y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(f\left(\frac{y}{x}\right) \right) = f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x} \right) = f'\left(\frac{y}{x}\right) \cdot \frac{1}{x}$

$\rightarrow \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{x} f'\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \frac{x^2}{x^2+y^2} = f'\left(\frac{y}{x}\right) \checkmark$ ok.

(Notemos que lo vale si $x \neq 0$)

$\Rightarrow \frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = f'\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \frac{1}{1+t^2} = f'(t) \Rightarrow f(t) = \arctg(t) + C$

$\forall C$ cte.

Usaremos $C=0$.

$\Rightarrow g(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right) = \arctg\left(\frac{y}{x}\right)$ Satisface lo deseado.

Obs. g queda bien def. en todo Rect. que no contenga a $(0, 0)$.

Luego, escogemos R tal que contenga al círculo centrado en $(2r, 0)$ y de radio r . p.e. $R = [r-\epsilon, 3r+\epsilon] \times [-r-\epsilon, r+\epsilon]$ con $\epsilon > 0$ suf. pequeño para que $(0, 0) \notin R$.

Luego, para cualquier curva contenida en R :

$$m(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \nabla g(\vec{r}(t)) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \frac{1}{2\pi} \int_a^b \frac{d}{dt} (g(\vec{r}(t))) dt = g(\vec{r}(b)) - g(\vec{r}(a)) = 0 //$$

La última igualdad se tiene pues Γ es cerrada $\Rightarrow \vec{r}(a) = \vec{r}(b)$.

$$\Rightarrow g(\vec{r}(a)) = g(\vec{r}(b)) \Rightarrow g(\vec{r}(b)) - g(\vec{r}(a)) = 0$$

o $\forall \Gamma$ contenido en $\mathbb{R}$

$$m(\Gamma) = \frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0. \quad \text{Obs. Notese que todo esto es válido, pues } g \text{ está bien def.}$$

$\forall \Gamma$ contenido en $\mathbb{R}$ (pues $(0,0) \notin \mathbb{R}$)

c) No hay contradicción alguna, pues no integramos en una región que contenga al origen, por lo que el potencial g está bien definido.

De hecho de aquí concluimos que $m(\Gamma) = 0 \quad \forall \Gamma$ ~~contenida~~ contenida en una región que no contenga a $(0,0)$.