Auxiliar 1 - Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Escuela de Ingeniería, Universidad de Chile
Lunes 21 de Marzo, 2011

Profesor Cátedra: Jaime H. Ortega
Profesores Auxiliares: Benjamín Obando Vallejos - Matías Godoy Campbell

Pregunta 1.

a) Se define la Lemniscata (centrada en el origen) como la curva plana cuyos puntos satisfacen la siguiente propiedad:

$P = (x, y)$ pertenece a la Lemniscata si y solo si $d(P, (a, 0)) \cdot d(P, (-a, 0)) = a^2$.

Pruebe que, en coordenadas polares, es posible parametrizar esta curva como:

$$\rho^2(\theta) = \begin{cases} 2a^2\cos(2\theta) & \text{si } \theta \in [0, \pi/4] \cup [3\pi/4, 5\pi/4] \cup [7\pi/4, 2\pi] \\ 0 & \text{si no} \end{cases}$$

b) Se define la Cardioide como la curva descrita por un punto de una circunferencia que, sin deslizarse, rueda alrededor de otra circunferencia de igual radio. Pruebe que, en coordenadas polares, es posible parametrizar esta curva (de modo tal que, si $\theta = 0$ estamos en el origen) como:

$$\rho(\theta) = 2a(1 - \cos(\theta))$$

Donde a es el radio de las circunferencias que generan la Cardioide.

Pregunta 2. Calcule el gradiente de:

$$f(x, y, z) = \frac{\arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Pregunta 3. Sea el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{R}^2$ definido por:

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2}\right)$$

Dada una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ se define: $n(\Gamma) := \frac{1}{2\pi}\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$

a) Para las siguientes parametrizaciones, bosqueje la curva correspondiente y calcule el valor de $n(\Gamma)$:

i) $\vec{\varphi}(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
ii) $\vec{\varphi}(t) = (r\cos(t), -r\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$.
iii) $\vec{\varphi}(t) = (r\cos(t), r\sin(t))$, $t \in [0, 4\pi]$.
iv) Γ es la frontera del cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ recorrida en el sentido de las manecillas del reloj. Pregunta: Es $\vec{F}$ un campo conservativo en todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$?. Dada Γ curva cerrada en torno al origen $(0, 0)$, se le llama a $n(\Gamma)$ el número de enrollamiento anti-horario de Γ. Justifique esta terminología.

b) Considere la curva Γ parametrizada por $\vec{\varphi}(t) = (2r - r\cos(t), r\sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Para calcular $n(\Gamma)$ pruebe que existe $g : R \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{F}(x, y) = \nabla g(x, y)$ en un rectángulo R que contiene a la curva Γ. Deduzca el valor de $n(\Gamma)$ para toda curva contenida en dicho rectángulo.

<u>Indicación</u>: Busque g de la forma $g(x,y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (recuerde que $\dfrac{d}{dt}(arctg)(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$)

c) Hay alguna contradicción entre los resultados obtenidos en las partes (a) y (b)? Justifique.

Pregunta 4. Una partícula de masa m se mueve a lo largo de una curva Γ bajo la acción de un campo de fuerzas $\vec{F}$. Si la rapidez de la partícula en el instante t es $v(t)$ y su energía cinética está definida como $\frac{1}{2}mv^2(t)$. Demuestre que el trabajo realizado por $\vec{F}$ durante cualquier intervalo de tiempo es igual a la variación de la energía cinética en ese intervalo de tiempo. Esto se conoce como el principio del trabajo y la energía.

Pregunta 5. Sea la fuerza central $\vec{f}$ definida por: $\vec{f} = -\dfrac{k}{r^2}\vec{r}$ con $r = ||\vec{r}||$. Determine el trabajo necesario para que esta fuerza mueva a una partícula P a lo largo de la hélice circular derecha de radio $a > 0$, ángulo de giro por unidad de tiempo unitaria y desplazamiento por unidad de tiempo en la vertical $b > 0$ de modo que esta realice exactamente media vuelta alrededor de la espiral.